Ferienkurs Analysis 3 - Probeklausur - Musterlösung

Ralitsa Bozhanova, Max v. Vopelius

12.08.2009

1 Elementare Lösungsmethoden

Gegeben ist die DGL

$$y'(x) = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

Es sei $f(x,y) = x^2 - y^2, g(x,y) = 2xy$ und $x > 0, y > 0$.

In dieser Aufgabe ist jeweils nur eine Antwort richtig!

(a) Aus welcher Ungleichung kann man schließen, dass die DGL nicht exakt ist?

$$\left(\square\ \partial_x f \neq \partial_y g \quad \square\ \partial_x f \neq -\partial_y g \quad \square\ \partial_y f \neq \partial_x g \quad \square\ \partial_y f \neq -\partial_x g \right)$$

(b) Welche Gleichung muss ein integrierender Faktor $h(x)$ erfüllen

$$\square\ h(\partial_y f - \partial_x g) = h'g \quad \square\ \partial_x(hf) = \partial_y(hg) \quad \square\ h\partial_y f = h\partial_x g \quad \square\ h'\partial_x g = h\partial_y h$$

(c) Welche der folgenden Funktionen sind integrierende Faktoren für die DGL?

$$\square\ h(x) = -\tfrac{2}{x} \quad \square\ h(x) = \tfrac{1}{x^2} \quad \square\ h(x) = \tfrac{x^3}{3} \quad \square\ h(x) = -\tfrac{1}{2}\log x$$

(d) Für welche Funktion gilt $V(x, y(x)) = const$, falls $y(x)$ eine Lösung der DGL ist?

$$\square\ V(x,y) = \tfrac{x^2-y^2}{y} \quad \square\ V(x,y) = x(y^2 - \tfrac{1}{3}x^2) \quad \square\ V(x,y) = \tfrac{x^2+y^2}{x} \quad \square\ V(x,y) = \tfrac{x^2-y^2}{x}$$

(e) Welche der folgenden Funktionen $y : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung der DGL?

$$\square\ y(x) = \sqrt{x(1-x)} \quad \square\ y(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad \square\ y(x) = \sqrt{x(x^2+1)} \quad \square\ y(x) = x + \sqrt{1-x}$$

2 Potenzreihen

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{aligned} f'(t) - f(t)t &= b(1 - t^2) \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

mit einer Konstante $b \in \mathbb{C}$ erfüllt. Gehen Sie davon aus, daß die Lösung f in einer Umgebung von 0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist, d.h

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

a) Welche Werte nehmen die ersten vier Koeffizienten an?

☐ $c_0 = 1 \quad c_1 = b \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad c_3 = 0$

☐ $c_0 = 1 \quad c_1 = -b \quad c_2 = \frac{1}{2}(1 - b) \quad c_3 = b$

☐ $c_0 = 1 \quad c_1 = b \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad c_3 = \frac{1}{2}b$

☐ $c_0 = 1 \quad c_1 = -b \quad c_2 = \frac{1}{2}(1 - b) \quad c_3 = 0$

b) Welche Rekursionsgleichung erfüllen die Koeffizienten für $l = 2, 3, \ldots$

☐ $c_{l+2} = \dfrac{1}{l+2} c_l$

☐ $c_{l+2} = \dfrac{1-b}{l+2} c_l$

☐ $c_{2l+1} = \dfrac{1}{2l+2} c_{2l}$

☐ $c_{l+1} = \dfrac{1}{l+1} c_l$

c) Welche explizite Darstellung der Koeffizienten trifft für $b = 0$ zu?

☐ $c_{2l} = \dfrac{1}{2l!} \quad l \in \mathbb{N}$

☐ $c_{2l} = \dfrac{1}{2^l l!} \quad l \in \mathbb{N}$

☐ $c_{2l+1} = 1 \quad l \in \mathbb{N}$

☐ $c_{2l+1} = 0 \quad l \in \mathbb{N}$

d) Geben Sie den Konvergenzradius R der so bestimmten Potenzreihe an.

$\square R = 0$

$\square R = 2$

$\square R = \infty$

$\square R = 1$

3 Linearisierung

Gegeben ist die DGL

$$\ddot{x} = \alpha \dot{x} + \frac{1}{\cosh(x)} - 1, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Schreiben Sie die Gleichung als System 1. Ordnung der Form $\dot{y} = F(y)$ mit $y \in \mathbb{R}^2$ und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wie lauten der Fixpunkte des Sytems?

$\square$ $(\pi, 0)$ $\square$ $(0, 0)$ $\square$ $(0, 1)$ $\square$ $(0, 2\pi)$

(b) Wie lautet die Linearisierung von F am Fixpunkt?

$\square \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\square \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\square \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $\square \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Wie lauten die Eigenwerte der Linearisierung?

$\square$ $\{0, 1\}$ $\square$ $\{1, \alpha\}$ $\square$ $\{-1, 1\}$ $\square$ $\{0, \alpha\}$

(d) Von welchem Typ ist der Fixpunkt?

$\square$ instabil für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$\square$ rein elliptisch für $\alpha = 0$

$\square$ stabil für alle $\alpha > 0$

$\square$ rein hyperbolisch für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

4 Fourier-Integrale

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 \leq x < 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

mit der zugehörigen Fourier-Transformierten $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} f(x)dx$

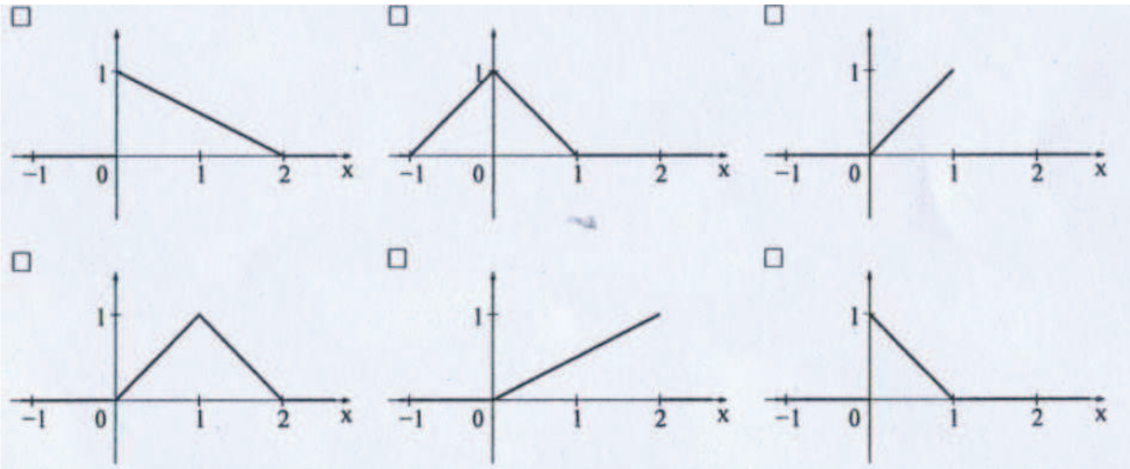
(a) Welchen Wert hat $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 dk$?

☐ $\frac{1}{2\pi}$ ☐ 1 ☐ 0 ☐ $\sqrt{2\pi}$ ☐ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

(b) Welche Beziehung gilt für $k \neq 0$

☐ $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(k)}{k}$ ☐ $\widehat{f}(k) = \frac{e^{ik}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(k)}{ik}$ ☐ $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik}}{k}$ ☐ $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-e^{-ik}}{ik}$

(c) Welches ist der Graph von $f * f$ (Faltung)?



(d) Wie lautet die Fourier-Transformierte von $f * f$ als funktion von k

☐ $\sqrt{2\pi}|\widehat{f}(k)|^2$ ☐ $\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)\widehat{f}(-k)$ ☐ $\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2$ ☐ $\sqrt{2\pi}\widehat{f}(2k)$

(e) Sei nun $g(x) = af(ax)$. Wie lautet die Fourier-Transformierte $\widehat{g}(k)$ für $a > 0$

☐ $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(\frac{k}{a})$ ☐ $\widehat{g}(k) = e^{ika}\widehat{f}(k)$ ☐ $\widehat{g}(k) = a\widehat{f}(ak)$ ☐ $\widehat{g}(k) = a\widehat{f}(\frac{k}{a})$

5 Holomorphie

Verwenden Sie die Taylorentwicklung im Entwicklungspunkt $x = 0$ von $\log(1+x), x \in \mathbb{R}$, und den Identitätssatz, um zu zeigen, dass der Hauptzweig des Logarithmus log auf $B = \{z \in \mathbb{C} | |z-1| < 1\}$ mit der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

übereinstimmt.

6 Wegintegral

Sei γ ein Weg in der komplexen Ebene, der einmal den vollen Kreis um den Ursprung vom Radius $R > 0$ im Uhrzeigersinn durchlaufe. Berechnen Sie das folgende Wegintegral

$$\int_\gamma dz \,\mathrm{Im}\, z$$

7 Residuen

Gegeben ist die Funktion

$$f(z) = \frac{1+z}{z^2(1-z^2)^2}$$

(*a*) Wie groß ist das Residuum von f an der Stelle $z = -1$?

$$\Box\frac{1}{2} \qquad \Box\frac{\pi i}{2} \qquad \Box\frac{1}{4} \qquad \Box 0 \qquad \Box\frac{1}{4\pi i}$$

(*b*) Wie lautet der Standardansatz für eine vollständige Partialbruchzerlegung von f?

$$\Box\, f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z^2-1} + \frac{D}{(z^2-1)^2} + E$$
$$\Box\, f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{(z-1)^2}$$
$$\Box\, f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{(z-1)^2} + \frac{E}{z+1}$$
$$\Box\, f(z) = \frac{B}{z^2} + \frac{D}{(z-1)^2} + \frac{E}{z+1}$$

(*c*) Wie lauten die ersten Terme der Laurent-Entwicklung von f um $z = 1$ mit den Konstanten auf (b) und geeigneten $M_0, M_1 \in \mathbb{C}$

$$\Box\, f(z) = M_0 + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + ...$$
$$\Box\, f(z) = \frac{D}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-1} + M_0 + M_1(z-1) + ...$$
$$\Box\, f(z) = \frac{C}{z-1} + M_0 + M_1(z-1) + ...$$
$$\Box\, f(z) = \frac{D}{(z+1)^2} + \frac{C}{z+1} + M_0 + M_1(z+1)...$$

(d) Wie lautet eine Integraldarstellung von dem in (c) definierten M_0?

$\square\, M_0 = \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z-1} dz$ $\qquad$ $\square\, M_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z-1} dz$

$\square\, M_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} (z-1)^2 f(z) dz$ $\qquad$ $\square\, M_0 = \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} (z-1)^2 f(z) dz$

(e) Wie lautet eine differentielle Darstellung von dem in (c) definierten M_0?

$\square\, M_0 = \frac{d}{dz}(z-1)^2 f(z)\Big|_{z=1}$ $\qquad$ $\square\, M_0 = \frac{1}{2\pi i} \frac{d^2}{dz^2}(z-1)^2 f(z)\Big|_{z=1}$

$\square\, M_0 = \frac{1}{2} \frac{d^3}{dz^3}(z-1)^3 f(z)\Big|_{z=1}$ $\qquad$ $\square\, M_0 = \frac{1}{2} d^2 dz^2 (z-1)^2 f(z)\Big|_{z=1}$

8 Hilberträume und beschränkte Operatoren

(a) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ In einem normierten Vektorraum gilt das Parallelogrammgesetz.
- ☐ Ein normierter Vektorraum ist ein Prähilbertraum, falls das Parallelogrammgesetz gilt.
- ☐ In einem Prähilbertraum gilt die Polarisationsidentität.
- ☐ In einem normierten Vektorraum gilt die Polarisationsidentität.

(b) Sei A ein beschränkter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ $||A|| = \sup_{||\psi||=1} |(\psi, A\psi)|$
- ☐ A ist unitär, falls $(A\psi, A\varphi) = (\psi, \varphi)$ für ein $\psi \in \mathcal{H}$ und ein $\varphi \in \mathcal{H}$
- ☐ A ist hermitesch, genau falls $\psi, A\varphi) = (A\psi, \varphi)$ für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$
- ☐ $\dim A \leq 1,$ falls A eine orthogonale Projektion ist.

(c) Sei A ein Multiplikationsoperator auf $L^2(\mathbb{R})$ der Form $(A\psi)(x) = V(x)\psi(x)$ mit $V \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ A ist beschränkt, falls $|V(x)| \leq c$ für ein $c > 0$
- ☐ A ist hermitesch, falls A beschränkt ist und $\operatorname{Im} V = 0$.
- ☐ A ist unitär.
- ☐ A ist eine orthogonale Projektion.

(d) Sei B der Operator der Verschiebung auf $l^2(\mathbb{Z})$ der Form $(B\psi)_n = \psi_{n-1}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ $||B^*|| = ||B||$
- ☐ B ist hermitesch.
- ☐ B ist unitär.
- ☐ $||B|| < 1$

9 Norm einer orthogonalen Projektion

Sei $P \neq 0$ eine orthogonale Projektion auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Beweisen Sie, dass $||P|| = 1$.