Ferienkurs Analysis 3 - Übungen Funktionentheorie (2), abstrakte Vektorräume - Musterlösung

Ralitsa Bozhanova, Max v. Vopelius

13.08.2009

1 Residuen

(a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in U$. Wie lautet das Residuum von $\frac{f(z)}{(z-a)}$ in a?

(b) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in U$ mit $g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Res}_a \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

(c) Bestimmen Sie alle Residuen von $f(z) = \frac{1}{(1+z^3)}$. Wie lautet die Partialbruchzerlegung von f?

(d) Wie lautet das Residuum von $\cot z$ und $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ bei 0?

Lösung:

(a) f kann als Potenzreihe geschrieben werden:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n (z-a)^n$$

$\Rightarrow$ Laurententwicklung für $g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$

$$g(z) = \sum_{n \geq -1} f_{n+1} (z-a)^n$$

$\to \mathrm{Res}_a\, g = f_0 = f(a)$

(b) $h(z) := \frac{(z-a)}{g(z)}$ ist beschränkt in einer Umgebung von a, da $\lim_{z \to a} \frac{g(z)}{z-a} = g'(a) \neq 0$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist $h(z)$ holomorph auf eine Umgebung von a fortsetzbar mit $h\,(a) = \frac{1}{g'(a)}$, wobei h die Fortsetzung von h bezeichne. Nach Teil (a) ist also:

$$\mathrm{Res}_a \left(\frac{f}{g} \right) = \mathrm{Res}_a \left(\frac{f(z)\; h\,(z)}{z-a} \right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

(c) $1+z^3$ hat 3 einfache Nullstellen: $z_j = -e^{2\pi i \frac{j}{3}}, j = 0,1,2$. Aus Teil (b):

$$\mathrm{Res}_{z_j} f = \frac{1}{3z_j^2} = \frac{1}{3} e^{-4\pi i \frac{j}{3}} = \begin{cases} \frac{1}{3} & j=0 \\ \frac{1}{3} e^{\frac{2}{3}\pi i} & j=1 \\ \frac{1}{3} e^{-\frac{2}{3}\pi i} & j=2 \end{cases}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{1+z^3} = \frac{\mathrm{Res}_{z_0} f}{z-z_0} + \frac{\mathrm{Res}_{z_1} f}{z-z_1} + \frac{\mathrm{Res}_{z_2} f}{z-z_2}$$

(d) $\sin'(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$
$\rightarrow \mathrm{Res}_0(\cot z) = \frac{\cos 0}{\sin' 0} = 1$
Laurententwicklung von $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$:

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)} = \sum_{n<0} a_n z^n$$

Somit:

$$\mathrm{Res}_0\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right) = a_{-1} = 1$$

2 Berechnung von Integralen

Zeigen Sie, dass:

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2+b^2} = \frac{\pi}{b} e^{-b|k|}$$

Lösung:

(a) $1+x^4$ besitzt vier Nullstellen erster Ordnung $z_j = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}j\right)}, j = 0,1,2,3$. Die entsprechenden Residuen lauten $\mathrm{Res}_{z_j} f = \frac{1}{4z_j^3}$. Nur z_0 und z_1 liegen in der oberen Halbebene. f fällt schnell genug ab (mindestens quadratisch), sodass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z_0} f + \mathrm{Res}_{z_1} f\right) = \frac{i\pi}{2}\left(e^{-\frac{3\pi}{4}i} + e^{-\frac{9\pi}{4}i}\right) = \frac{i\pi}{2}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(b) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ hat einen Pol der Ordnung $n+1$ in $z_0 = i$. Anwendung der

Formel aus der Vorlesung:

$$\begin{aligned}
2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f &= \frac{2\pi i}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}(z-z_0)^{n+1} f(z)\right]_{z=z_0} = \\
&= \frac{2\pi i}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right]_{z=z_0} = \\
&= \frac{2\pi i}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{-(n+1)}{(z+i)^{n+2}}\cdots\cdots\right]_{z=z_0} = \frac{\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}
\end{aligned}$$

Sei $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = Re^{it}$ mit $R > 1$. Dann liefert der Residuensatz, dass

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f - \int_\gamma dz f(z)$$

Abschätzung des Integrals durch Länge von γ und Supremum von f.

$$\left|\int_\gamma dz f(z)\right| \leq \pi R \sup_{z\in\gamma} |f(z)| = \pi R \sup_{t\in[0,\pi]} \frac{1}{(R^4 + 2R^2\cos(2t) + 1)^{\frac{(n+1)}{2}}} = \frac{\pi R}{(R^2-1)^{n+1}}$$

(c)

$$\frac{1}{z^2+b^2} = \frac{i}{2b}\left(\frac{1}{z+ib} - \frac{1}{z-ib}\right)$$

$$\Rightarrow I := \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{x^2+b^2} = \frac{i}{2b}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{x+ib}}_{I_2} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{x+ib}\right)$$

<u>I_2</u>: <u>$1.k < 0, b < 0$</u>
$x \mapsto \frac{1}{z+ib}$ geht wie $\frac{1}{z}$ gegen 0 für $|z| \to \infty$. Die Nullstelle des Nenners ist $-ib$, liegt also in der oberen Halbebene und $\operatorname{Res}_{-ib}\left(\frac{e^{-ikx}}{x+ib}\right) = e^{-kb}$. Für $\operatorname{Im} z > 0$ ist e^{-ikx} exponentiell klein.
Daher gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{x+ib} = 2\pi i \operatorname{Res}_{-ib}\left(\frac{e^{-ikz}}{z+ib}\right) = 2\pi i e^{-kb}$$

<u>2.Fall: $k < 0, b > 0$</u>
Residuum in der unteren Halbebene, somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{x+ib} = 0$$

Für den Term mit umgekehrtem Vorzeichen Rechnung analog mit entgegengesetztem Vorzeichen beim Weg in der unteren Halbebene.
Damit ergibt sich für das Integral I:
<u>Fall $1 : k > 0$</u>

$$I = \frac{i}{2b}\left(-2\pi i e^{-kb} - 0\right) = \frac{\pi}{b} e^{-b|k|}$$

Fall 2 : $k < 0$

$$I = \frac{i}{2b}\left(0 - 2\pi i e^{bk}\right) = \frac{\pi}{b} e^{-b|k|}$$

Fall 3: $k = 0$

Für $k = 0$ fällt der Integrand schnell genug ab:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + b^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{ib}\left(\frac{1}{z^2 + b^2}\right) = 2\pi i \frac{1}{2ib} = \frac{\pi}{b}$$

3 Konforme Abbildungen

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer. Eine reell differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt winkeltreu im Punkt $z_0 \in D$, falls $Df(z_0)$ injektiv ist und

$$|z||w| < \langle Df(z_0)z, Df(z_0)w\rangle = |Df(z_0)z|\,|Df(z_0)w|\,\langle z, w\rangle$$

wobei $\langle z, w\rangle := \operatorname{Re}(z\overline{w})$. Sie heißt orientierungstreu in $z_0 \in D$, falls $\det Df(z_0) > 0$.

(a) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Beweisen Sie die folgende Äquivalenz:
f ist holomorph in D und $f' \neq 0$ in $D \leftrightarrow f$ ist winkeltreu und orientierungstreu in D

(b) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

In welchem Gebiet ist f winkeltreu? Bestimmen Sie das Bild unter f einer Kreislinie $|z| = r < 1$ und einer Radiusstrecke $z = t \cdot z_0$ mit $|z_0| = 1$ und $0 < t < 1$. Unter welchem Winkel schneiden sich diese Bilder?

Lösung:

(a) „$\Rightarrow$“: Jede Abbildung der Form $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\lambda \neq 0$ ist winkeltreu. Da das Differenzial $Df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von der Form $z \mapsto f'(z_0)z, (z_0 \in D)$ folgt die winkeltreue.
Unter Anwendung der CR-Dgl. folgt überdies, dass

$$\det Df(z_0) = \det \begin{bmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ -u_y(z_0) & u_x(z_0) \end{bmatrix} = u_x(z_0)^2 + u_y(z_0)^2 > 0$$

da nach Voraussetzung $f'(z_0) = u_x(z_0) - i(u_y(z_0) \neq 0$. Das ist die Orientierungstreue.
„$\Leftarrow$“: Da Df injektiv ist, gilt $a : Df1 \neq 0$. Für $b := a^{-1}Dfi$ folgt mit der Winkeltreue:

$$0 = \langle i, 1\rangle = \langle Dfi, Df1\rangle = \langle ab, a\rangle = |a|^2 \operatorname{Re} b$$

woraus $b = ir$ mit $r \in \mathbb{R}$. Das Differenzial Df ist $\mathbb{R}$-linear, $Dfz = Df(x + iy) = xDfi + yDfi = a(x + iry)$

und $\langle Df1, Dfz\rangle = \langle a, a\,(x+iry)\rangle = |a|^2 x$. Aus der Winkeltreue von Df folgt also

$$\begin{aligned} |x+iy||a|^2 x = |1||z|\,\langle Df1, Dfz\rangle = \\ = |Df1||Dfz|\,\langle 1, z\rangle = |a||a(x+iry)|x \end{aligned}$$

sodass $|x+iry| = |x+iy|$ für alle z mit $x \neq 0$ woraus $r = \pm 1$. Wir sehen also, dass für ein winkeltreues f ein $a \neq 0$ existiert, sodass entweder $Dfz = az$ oder $Dfz = a\overline{z}$. Die Forderung nach der Orientierungstreue schließt aber den Fall $Dfz = a\overline{z}$ aus.
$\Rightarrow f$ komplex differenzierbar in z_0 und $f'(z_0) = a \neq 0$.

(b) Die Funktion f ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da $f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$ ist f in $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}$ winkeltreu. Wir setzen $(z = x+iy)$, $f = u + iv)$.

$$r := |z|, \xi := \frac{x}{r}, \eta := \frac{y}{r}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\xi, v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\eta$$

woraus wegen $\xi^2 + \eta^2 = 1$:

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1, \frac{u^2}{\xi^2} - \frac{v^2}{\eta^2} = 1$$

Das Bild unter f einer Kreislinie $|z| = r < 1$ ist also eine Ellipse mit den Achsen $\frac{1}{r} + r$ und $\frac{1}{r} - r$, während das Bild unter f einer Radiusstrecke $z = z_0 t$ mit $|z_0| = 1$ und $0 < t < 1$ ein Hyperbelast ist.
Da sich ein Radiusstrahl mit der Kreislinie im rechten Winkel schneidet, bleibt dies auch für die Bilder gültig.

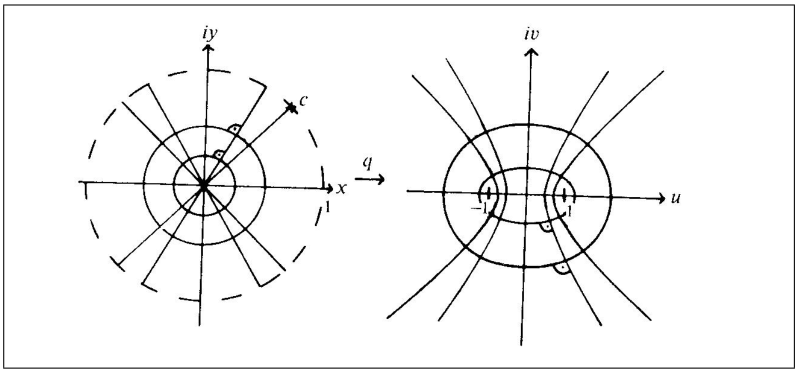

Abbildung 1: Darstellung Radiusstrecken / Kreislinien

4 Uneigentliche Integrale

Sei D eine offene, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$, die den Abschluss $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ enthält. Weiter sei eine Funktion f bis auf endlich viele nicht-reelle Punkte

w holomorph in D, es existiere $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ und es sei $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Zeigen Sie, dass:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 2\pi i \sum_{w\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}_w f$$

Lösung:
Seien $w \in \mathbb{H}$ die endlich vielen Punkte in denen f nicht holomorph ist. Sei weiter $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{H}$ definiert durch $\gamma(t) := Re^{it}$ der Halbkreis in der oberen Halbebene vom Radius $R > \max |w|$. Der Residuensatz liefert:

$$\int_{-R}^{R} dx f(x) = 2\pi i \sum_{w\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}_w f - \int_{\gamma} dz f(z)$$

Abschätzung des Integrals:

$$\left| \int_{\gamma} dz f(z) \right| \leq \pi R \sup_{z\in\gamma} |f(z)|$$

Da $lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ nach Voraussetzung folgt Behauptung.

5 Parallelogrammgesetz und Polarisationsidentität

(a) Sei $(\mathcal{H}, <\cdot,\cdot>)$ ein komplexer Prähilbertraum, $||\cdot|| =<\cdot,\cdot>^{\frac{1}{2}}$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm und $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass das Parallelogrammgesetz gilt,

$$||\psi + \varphi||^2 + ||\psi - \varphi||^2 = 2||\psi||^2 + 2||\varphi||^2$$

und dass das Skalarprodukt mittels Polarisationsidentität durch die Norm ausgedrückt werden kann.

$$<\psi, \varphi>= \frac{1}{4} \left(||\psi + \varphi||^2 - ||\psi - \varphi||^2 - i||\psi + i\phi||^2 + i||\psi - i\phi||^2 \right)$$

(b) Zeigen Sie umgekehrt, dass auf einem normierten komplexen VR $\mathcal{H}$ mit Norm $||\cdot||$ ein Skalarprodukt $<\cdot,\cdot>$ mit $||\cdot|| =<\cdot,\cdot>^{\frac{1}{2}}$ existiert, falls das Parallelogrammgesetz gilt.

Lösung:

(a) Zuerst Beweis des Parallelogrammgesetzes. Dazu

$$||\psi \pm \varphi||^2 =<\psi \pm \varphi, \psi \pm \varphi>= ||\psi||^2 \pm 2 \operatorname{Re} <\psi, \varphi> + ||\varphi||^2$$

Addition der beiden Terme mit unterschiedlichem Vorzeichen führt zum Parallelogrammgesetz. Die Polarisationsidentität prüft man durch direkte Rechnung:

$$\begin{aligned}
&||\psi + \varphi||^2 - ||\psi - \varphi||^2 - i||\psi + i\phi||^2 + i||\psi - i\phi||^2 = \\
=&||\psi||^2 + 2 \operatorname{Re} <\psi, \varphi> + ||\varphi||^2 - ||\psi||^2 + 2 \operatorname{Re} <\psi, \varphi> - ||\varphi||^2 \\
&-i||\psi||^2 + 2i \operatorname{Im} <\psi, \varphi> - i||\varphi||^2 + i||\psi||^2 + 2i \operatorname{Im} <\psi, \varphi> + i||\varphi||^2 \\
=&4(\operatorname{Re} <\psi, \varphi> + i \operatorname{Im} <\psi, \varphi>)
\end{aligned}$$

(b) Wir definieren eine Abbildung $< \cdot, \cdot >: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ durch die Polarisationsidentität. Es ist zu zeigen, dass $< \cdot, \cdot >$ die Eigenschaften (1) bis (4) eines Skalarproduktes besitzt.

(1) $< \psi, \psi > \geq 0$ und $< \psi, \psi >= 0 \leftrightarrow \psi = 0$. Dies folgt aus der Eigenschaft der Norm:

$$\begin{aligned} 4 < \psi, \psi > &= ||2\psi||2 - i||(1+i)\psi||^2 + i||(1-i)\psi||^2 = \\ &= 4||\psi||^2 - i|1+i|^2||\psi||2 + i|1-i|^2||\psi||^2 = 4||\psi||^2 \end{aligned}$$

(2) $< \psi, \varphi >= \overline{< \varphi, \psi >}$ folgt direkt aus der Definition

(3) $< \varphi_1 + \varphi_2, \psi >=< \varphi_1, \psi > + < \varphi_2, \psi >$
Benutzung des Parallelogrammgesetzes zur Umformung der in der Polarisationsidentität auftretenden Terme. Der erste lautet:

$$||\varphi_1 + \varphi_2 + \psi||^2 = 2||\varphi_1 + \psi||2 + 2||\varphi_2||^2 - ||\varphi_1 - \varphi_2 + \psi||^2 =: \alpha$$

und, um zu symmetrisieren, schreiben wir

$$||\varphi_1 + \varphi_2 + \psi||^2 = 2||\varphi_2 + \psi||2 + 2||\varphi_1||^2 - || - \varphi_1 + \varphi_2 + \psi||^2 =: \beta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ||\varphi_1 + \varphi_2 + \psi||^2 = \frac{\alpha + \beta}{2} =& ||\varphi_1 + \psi||^2 + ||\varphi_1||^2 + ||\varphi_2 + \psi||^2 + ||\varphi_2||^2 \\ & - \frac{1}{2}(||\varphi_1 - \varphi_2 + \psi||^2 + || - \varphi_1 + \varphi_2 + \psi||^2) \end{aligned}$$

Analog für die restlichen drei Terme der Polarisationsidentität:

$$\begin{aligned} ||\varphi_1 + \varphi_2 - \psi||^2 =& ||\varphi_1 - \psi||^2 + ||\varphi_1||^2 + ||\varphi_2 - \psi||^2 + ||\varphi_2||^2 \\ & - \frac{1}{2}(||\varphi_1 - \varphi_2 - \psi||^2 + || - \varphi_1 + \varphi_2 - \psi||^2) \\ ||\varphi_1 + \varphi_2 + i\psi||^2 =& ||\varphi_1 + i\psi||^2 + ||\varphi_1||^2 + ||\varphi_2 + i\psi||^2 + ||\varphi_2||^2 \\ & - \frac{1}{2}(||\varphi_1 - \varphi_2 + i\psi||^2 + || - \varphi_1 + \varphi_2 + i\psi||^2) \\ ||\varphi_1 + \varphi_2 - i\psi||^2 =& ||\varphi_1 - i\psi||^2 + ||\varphi_1||^2 + ||\varphi_2 - i\psi||^2 + ||\varphi_2||^2 \\ & - \frac{1}{2}(||\varphi_1 - \varphi_2 - i\psi||^2 + || - \varphi_1 + \varphi_2 - i\psi||^2) \end{aligned}$$

Addition dieser Terme mit den Vorfaktoren aus der Polarisationsidentität liefert die Behauptung.

(4) $< \psi, \lambda\varphi >= \lambda < \psi, \varphi >$
Nach (iii) gilt die Behauptung für $\lambda \in \mathbb{N}$ und gemäß Definition auf für $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$, also auch für $\lambda \in \mathbb{Z}$. Deshalb gilt die Behauptung auch für $\lambda = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, denn:

$$n < \psi, \lambda\varphi >= n < \psi, \varphi\frac{m}{n} >= m < \psi, \varphi >= n\lambda < \psi, \varphi >$$

Die stetigen Funktionen $\lambda \mapsto < \psi, \lambda\varphi >$ und $\lambda \mapsto \lambda < \psi, \varphi >$ stimmen auf $\mathbb{Q}$, also auch auf $\mathbb{R}$ überein. Da die Behauptung auch für $\lambda = i$ zutrifft, folgt die Behauptung.