Ferienkurs Analysis 3 - Übungen Funktionentheorie (2), abstrakte Vektorräume

Ralitsa Bozhanova, Max v. Vopelius

13.08.2009

1 Residuen

(a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in U$. Wie lautet das Residuum von $\frac{f(z)}{(z-a)}$ in a?

(b) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in U$ mit $g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Res}_a \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

(c) Bestimmen Sie alle Residuen von $f(z) = \frac{1}{(1+z^3)}$. Wie lautet die Partialbruchzerlegung von f?

(d) Wie lautet das Residuum von $\cot z$ und $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ bei 0?

2 Berechnung von Integralen

Zeigen Sie, dass:

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \,\forall n \in \mathbb{N}$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2+b^2} = \frac{\pi}{b} e^{-b|k|}$$

3 Konforme Abbildungen

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer. Eine reell differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt <u>winkeltreu</u> im Punkt $z_0 \in D$, falls $Df(z_0)$ injektiv ist und

$$|z||w| < \langle Df(z_0)z, Df(z_0)w \rangle = |Df(z_0)z| \, |Df(z_0)w| \, \langle z, w \rangle$$

wobei $\langle z, w\rangle := \mathrm{Re}(z\overline{w})$. Sie heißt orientierungstreu in $z_0 \in D$, falls $\det Df(z_0) > 0$.

(*a*) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Beweisen Sie die folgende Äquivalenz:
f ist holomorph in D und $f' \neq 0$ in $D \leftrightarrow f$ ist winkeltreu und orientierungstreu in D

(*b*) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

In welchem Gebiet ist f winkeltreu? Bestimmen Sie das Bild unter f einer Kreislinie $|z| = r < 1$ und einer Radiusstrecke $z = t \cdot z_0$ mit $|z_0| = 1$ und $0 < t < 1$. Unter welchem Winkel schneiden sich diese Bilder?

4 Uneigentliche Integrale

Sei D eine offene, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$, die den Abschluss $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ enthält. Weiter sei eine Funktion f bis auf endlich viele nicht-reelle Punkte w holomorph in D, es existiere $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ und es sei $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Zeigen Sie, dass:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{H}} \mathrm{Res}_w\, f$$

5 Parallelogrammgesetz und Polarisationsidentität

(*a*) Sei $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >)$ ein komplexer Prähilbertraum, $|| \cdot || =< \cdot, \cdot >^{\frac{1}{2}}$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm und $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass das Parallelogrammgesetz gilt,

$$||\psi + \varphi||^2 + ||\psi - \varphi||^2 = 2||\psi||^2 + 2||\varphi||^2$$

und dass das Skalarprodukt mittels Polarisationsidentität durch die Norm ausgedrückt werden kann.

$$< \psi, \varphi >= \frac{1}{4}\left(||\psi + \varphi||^2 - ||\psi - \varphi||^2 - i||\psi + i\phi||^2 + i||\psi - i\phi||^2\right)$$

(*b*) Zeigen Sie umgekehrt, dass auf einem normierten komplexen VR $\mathcal{H}$ mit Norm $|| \cdot ||$ ein Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >$ mit $|| \cdot || =< \cdot, \cdot >^{\frac{1}{2}}$ existiert, falls das Parallelogrammgesetz gilt.