Ferienkurs Analysis 3 - Übungen Funktionentheorie - Musterlösung

Ralitsa Bozhanova, Max v. Vopelius

12.08.2009

1 Differenzierbarkeit

(a) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie, dass die von A durch die Matrixmultiplikation auf $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ induzierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, falls $a_{21} = -a_{12}$ und $a_{22} = a_{11}$

Lösung: $\mathbb{C}$ ist VR über $\mathbb{C}$ und über $\mathbb{R}$. Das heißt es gibt $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ lineare Abbildung T mit $T(\lambda z) = \lambda T(z)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$.

$$
\begin{aligned}
& T : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ ist genau dann } \mathbb{R}\text{-linear, falls } T(z) = T(1)x + T(i)y \text{ mit } z = x + iy. \\
& T : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ ist genau dann } \mathbb{C}\text{-linear, falls } T(i) = iT(1) \\
& z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to z \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} = T(z) \\
& T(i) = iT(1) \\
& a_{12} + ia_{22} = i(a_{11} + ia_{21}) \\
\to \quad & a_{21} = -a_{12} \text{und } a_{11} = a_{22}
\end{aligned}
$$

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ nichtleer und offen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) f ist komplex differenzierbar in $z_0 \in U$

(2) f ist reell differenzierbar in $z_0 \in U$ und das Differenzial $Df(z_0)$ ist $\mathbb{C}$-linear

(3) f ist reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$v_x(z_0) = -u_y(z_0),\ v_y(z_0) = u_x(z_0)$$

Lösung: (1) $\leftrightarrow$ (2)
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist reell differenzierbar, wenn f als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ total differenzierbar.

$\rightarrow$ f komplex differenzierbar per Definition:

$$\lim_{h\to\infty} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)h}{h} = 0$$

d.h. f ist reell differenzierbar und $f'(z_0) \equiv Df(z_0)$ ein $\mathbb{C}$-lineares Differenzial.
$\leftarrow$ f ist reell differenzierbar, d.h. total in (x_0, y_0) falls f als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aufgefasst wird. Die lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die durch Matrixmultiplikation mit dem Differenzial Df hervorgeht ist per Vorraussetzung $\mathbb{C}$-linear.
(2) $\leftrightarrow$ (3)

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}$$

nach (1) ist die induzierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung genau dann $\mathbb{C}$-linear, falls $v_x(z_0) = -u_y(z_0)$ und $v_y(z_0) = u_x(z_0)$.

(c) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := x^3y^2 + ix^2y^3$ wobei $z = x + iy$. In welchen Punkten von $\mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar? Ist f dort auch holomorph?

<u>Lösung</u>: u, v sind stetig differenzierbar, also f reell differenzierbar. Nun noch Überprüfung der CR-Differenzialgleichungen:

$$\begin{aligned}
& v_x(z) = \frac{\partial}{\partial x}x^2y^3 = 2xy^3 \stackrel{!}{=} -u_y(z) = -\frac{\partial}{\partial y}x^3y^2 = -2x^3y \\
& u_x(z) = \frac{\partial}{\partial x}x^3y^2 = 3x^2y^2 \stackrel{!}{=} v_y(z) = \frac{\partial}{\partial y}x^2y^3 = 3x^2y^2 \\
\Rightarrow \quad & 2xy^3 = -2x^3y^2 \text{ oder } xy(x^2+y^2) = 0 \text{ , d.h. } xy = 0
\end{aligned}$$

Somit ist f genau in den Punkten der Koordinatenachsen komplex differenzierbar. f ist also nirgends in $\mathbb{C}$ holomorph.

2 Differenzierbarkeit (2)

(a) Zeigen Sie, dass $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ auf $\mathbb{C}$ und $g(z) = \frac{\log(x^2+y^2)}{2} + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z = 0\}$ holomorph ist.

(b) Bestimmen Sie die auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f mit Realteil $u(z) = e^x \sin y$ und $f(0) = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion zu $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(z) = \log|z|$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ harmonisch ist, aber nicht Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion sein kann.

<u>Lösung</u>:

(a) Sowohl f als auch g sind reell differenzierbar. Wir müssen also zeigen, dass Cauchy-Riemann

DGL erfüllt sind.

$$v_x(z) = \frac{\partial}{\partial x} e^x \sin y = e^x \sin y \overset{!}{=} -u_y(z) = -\frac{\partial}{\partial y} e^x \cos y = e^x \sin y$$
$$v_y(z) = \frac{\partial}{\partial y} e^x \sin y = e^x \cos y \overset{!}{=} u_x(z) = \frac{\partial}{\partial x} e^x \cos y = e^x \cos y$$

Für g:

$$v_x(z) = \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y}{x^2} \overset{!}{=} -u_y(z) = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} \log\left(x^2+y^2\right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y$$
$$v_y(z) = \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} \overset{!}{=} -u_x(z) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \log\left(x^2+y^2\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

(b) Da f holomorph sein soll müssen CR-DGL erfüllt sein:

$$v_x(z) = -u_y(z) = -\frac{\partial}{\partial y} e^x \sin y = -e^x \cos y \qquad (I)$$
$$v_y(z) = u_x(z) = \frac{\partial}{\partial x} e^x \sin y = e^x \sin y \qquad (II)$$
$$\Rightarrow v(z) = -e^x \cos y + C(y)$$
$$\text{in (II)} \quad \rightarrow C'(y) = 0$$

Aus $f(0) = 0 = i(C-1)$ folgt $C = 1$.

$$\Rightarrow f(z) = e^x \sin y + i(1 - e^x \cos y) = i(1 - e^z)$$

(c) Harmonische Funktion: $\Delta u(z) = 0$

$$\rightarrow \Delta u(z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \log|z| =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2+y^2} = 0$$

Falls u Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion ist, müssen CR-Dgl gelten:

$$\begin{aligned} v_x(z) &\overset{!}{=} -u_y(z) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \\ v_y(z) &\overset{!}{=} u_x(z) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \Rightarrow v(z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C(y) \text{ bzw} \\ v_y(z) &= \frac{x}{x^2+y^2} + C'(y) \rightarrow C \text{ const.} \end{aligned}$$

<u>aber</u>
v unstetig auf der y-Achse, daher kann v kein Imaginärteil einer komplex differenzierbaren

Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sein.

3 Komplexe Wegintegrale

(a) Seien $a, s > 0$ und γ der Rechteckrand $[-r - is, r - is] + [r - is, r + is] + [r + is, -r + is] + [-r + is, -r - is]$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}$$

(b) Sei $G = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1, \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1\}$. Konstruieren Sie einen Weg γ entlang ∂G und berechnen Sie

$$\int_\gamma dz \operatorname{Im} z \text{ und } \int_\gamma dz \overline{z}$$

(c) Sei $p(z)$ ein komplexwertiges Polynom, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial B_r(z_0)} dz \overline{p(z)} = 2\pi i r^2 \overline{p'(z_0)}$$

Lösung:

(a) Der Weg γ wird wie folgt parametrisiert:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= t - is, t \in [-r, r] \\
\gamma_2(t) &= r + it, t \in [-s, s] \\
\gamma_3(t) &= -t + is, t \in [-r, r] \\
\gamma_4(t) &= -r - it, t \in [-s, s]
\end{aligned}$$

Damit lässt sich das Integral schreiben als:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{z} &= \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_3} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_4} \frac{dz}{z} = \\
&= \int_{-r}^{r} \frac{dt}{t - is} + i \int_{-s}^{s} \frac{dt}{r + it} - \int_{-r}^{r} \frac{dt}{-t + is} - i \int_{-s}^{s} \frac{dt}{-r - it} \\
&= 2 \int_{-r}^{r} \frac{dt}{t - is} + 2i \int_{-s}^{s} \frac{dt}{r + it} = 2 \int_{-r}^{r} dt \frac{t + is}{t^2 + s^2} + 2i \int_{-s}^{s} dt \frac{r - it}{r^2 + t^2} \\
&= 2 \left[\frac{1}{2} log(t^2 + s^2) + i \arctan \frac{t}{s} \right]_{-r}^{r} + 2i \left[-i \frac{1}{2} \log(r^2 + t^2) + \arctan \frac{t}{r} \right]_{-s}^{s} \\
&= 4i \left(\arctan \frac{r}{s} + \arctan \frac{s}{r} \right) = 2\pi i
\end{aligned}$$

Die letzte Beziehung lässt sich sehr einfach anhand eines rechtwinkligen Dreiecks überprüfen. Die beiden dem rechten Winkel gegenüberliegenden Winkel (arctan) summieren sich zu π.

(b) Parametrisierung des Weges:

$$\gamma_1 = i + t(1-i) \ , t \in [0,1]$$
$$\gamma_2 = e^{it} \ , t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\int_\gamma dz \,\mathrm{Im}\, z = \int_{\gamma_1} dz \,\mathrm{Im}\, z + \int_{\gamma_2} dz \,\mathrm{Im}\, z = (1-i)\int_0^1 dt(1-t) + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} dte^{it}\sin t =$$
$$= (1-i)\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \frac{i}{4}\left[2it - e^{2it}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\int_\gamma dz\overline{z} = \int_{\gamma_1} dz\overline{z} + \int_{\gamma_2} dz\overline{z} = (1-i)\int_0^1 dt(t + i(t-1)) + i\int_0^\pi 2dte^{it}e^{-it} =$$
$$= (1-i)\frac{1}{2}(1-i) + i\frac{\pi}{2} = \underline{i\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}$$

(c) $\partial B_r(z_0)$ wird parametrisiert durch $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$; $p(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$. Für den Term n-ter Ordnung:

$$\int_\gamma dz\overline{a_n z^n} = \overline{a_n} it \int_0^{2\pi} dte^{it}\left(\overline{z_0} + re^{-it}\right)^n =$$
$$= \overline{a_n} ir \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \overline{z_0}^{n-k} r^k \int_0^{2\pi} \underbrace{dte^{-i(k-1)t}}_{2\pi\delta(k-1)} =$$
$$= \overline{a_n} ir \cdot n\overline{z_0}^{n-1} \cdot r^1 \cdot 2\pi = 2\pi ir^2 \overline{\frac{d}{dz}\left(a_n z^n\right)|_{z=z_0}}$$

4 Cauchyscher Integralsatz

Sei $n \in \mathbb{Z}, z_0 \in \mathbb{C}.D \equiv B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}, r > 0, z \in \mathbb{C}$

$$I_n(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} d\xi \left(\xi - z\right)^n$$

Zeigen Sie, dass $I_n(z_0) = \delta_{n,-1}$.
<u>Lösung</u>: Rand von B durch Kurve $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

$$I_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} d\xi(\xi - z_0)^n = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} dt\left(re^{it}\right)^n ire^{it} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} dte^{i(n+1)t}$$

5 Integralformeln für Polynome

Es sei $p(z) := \sum_{n=0}^N a_n z^n$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ gegeben.

(a) Sei $\epsilon > 0$ und $k\ in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon} dz \frac{p(z)}{z^{k+1}}$$

(b) Sei $\epsilon > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\epsilon} dz \frac{p(z)}{z-z_0}$$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} dz \frac{e^{-z}}{z^{k+1}}$$

Lösung:

(a) Für $k < 0$ ist Integrand holomoph und das Integral verschwindet

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|} = \epsilon dz \frac{p(z)}{z^{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon} dz \sum_{n_0}^{N} a_n z^{n-k-1} = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon} dz z^{n-k-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} a_n \delta_{n-k-1,-1} = \begin{cases} \mathrm{a}_k & \text{für } 0 \le k \le N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $p(z) = p(z_0) + \underbrace{(p(z) - p(z_0))}_{(z-z_0)q(z)}$, wobei q ein Polynom vom Grade $N-1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\epsilon} dz \frac{p(z)}{(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\epsilon} dz \left(\frac{p(z_0)}{z-z_0} + q(z)\right) = p(z_0)$$

(c)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} dz \frac{e^{-z}}{z^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} dz \sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{n!} z^{n-k-1}$$

$$= \sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} dz z^{n-k-1} = \sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{n!} \delta_{n-k-1,-1} = \frac{(-1)^k}{k!}$$

6 Logarithmusfunktion

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt eine Logarithmusfunktion, falls $e^{f(z)} = z \, \forall z \in U$.
Sei $\phi \in \mathbb{R}$ und $z_0 = e^{i\phi}$ und sei

$$L_\phi(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n z_0^n} (z - z_0)^n + i\phi$$

(a) Wie groß ist der Konvergenzradius von L_ϕ?

(b) Zeigen Sie, dass L_ϕ eine Logarithmusfunktion ist.

Lösung:

(a) Konvergenzradius: Formel von Cauchy-Hadarmard:

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n z_0^n} \quad |z_0| = 1$$

$$\to R = \limsup \sqrt[n]{n} = 1$$

(b)

$$\frac{d}{dz}\frac{e^{L_\phi(z)}}{z} = \frac{e^{L_\phi(z)} \cdot L'_\phi(z)}{z} - \frac{e^{L_\phi(z)}}{z^2} = 0$$

da auf der Konvergenzkreisscheibe $B_1(z_0) := \{z \in \mathbb{C} || z - z_0| < 1\}$

$$L'_\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z_0^n}(z - z_0)^{n-1} = \frac{1}{z_0} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^n}_{\text{geom. Summenformel}} = \frac{1}{z}$$

$\Rightarrow e^{L_\phi(z)} = cz$ mit $c \in \mathbb{C}$. Für $z = z_0$ folgt $e^{L_\phi(z_0)} = z_0 \to \underline{c = 1}$