Ferienkurs Analysis 3 - Übungen Funktionentheorie

Ralitsa Bozhanova, Max v. Vopelius

12.08.2009

1 Differenzierbarkeit

(a) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie, dass die von A durch die Matrixmultiplikation auf $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ induzierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, falls $a_{21} = -a_{12}$ und $a_{22} = a_{11}$

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ nichtleer und offen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) f ist komplex differenzierbar in $z_0 \in U$

(2) f ist reell differenzierbar in $z_0 \in U$ und das Differenzial $Df(z_0)$ ist $\mathbb{C}$-linear

(3) f ist reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$v_x(z_0) = -u_y(z_0),\ v_y(z_0) = u_x(z_0)$$

(c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := x^3y^2 + ix^2y^3$ wobei $z = x + iy$. In welchen Punkten von $\mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar? Ist f dort auch holomorph?

2 Differenzierbarkeit (2)

(a) Zeigen Sie, dass $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ auf $\mathbb{C}$ und $g(z) = \frac{\log(x^2+y^2)}{2} + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z = 0\}$ holomorph ist.

(b) Bestimmen Sie die auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f mit Realteil $u(z) = e^x \sin y$ und $f(0) = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion zu $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $u(z) = \log|z|$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ harmonisch ist, aber nicht Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion sein kann.

3 Komplexe Wegintegrale

(a) Seien $a, s > 0$ und γ der Rechteckrand $[-r - is, r - is] + [r - is, r + is] + [r + is, -r + is] + [-r + is, -r - is]$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}$$

(b) Sei $G = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1, \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1\}$. Konstruieren Sie einen Weg γ entlang ∂G und berechnen Sie

$$\int_\gamma dz \operatorname{Im} z \text{ und } \int_\gamma dz\overline{z}$$

(c) Sei $p(z)$ ein komplexwertiges Polynom, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial B_r(z_0)} dz\overline{p(z)} = 2\pi i r^2 \overline{p'(z_0)}$$

4 Cauchyscher Integralsatz

Sei $n \in \mathbb{Z}, z_0 \in \mathbb{C}.D \equiv B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}, r > 0, z \in \mathbb{C}$

$$I_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} d\xi \, (\xi - z)^n$$

Zeigen Sie, dass $I_n(z_0) = \delta_{n,-1}$.

5 Integralformeln für Polynome

Es sei $p(z) := \sum_{n=0}^N a_n z^n$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ gegeben.

(a) Sei $\epsilon > 0$ und $k \; in\mathbb{Z}$. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} dz \frac{p(z)}{z^{k+1}}$$

(b) Sei $\epsilon > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\epsilon} dz \frac{p(z)}{z - z_0}$$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} dz \frac{e^{-z}}{z^{k+1}}$$

6 Logarithmusfunktion

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt eine Logarithmusfunktion, falls $e^{f(z)} = z \, \forall z \in U$.
Sei $\phi \in \mathbb{R}$ und $z_0 = e^{i\phi}$ und sei

$$L_\phi(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n z_0^n} (z - z_0)^n + i\phi$$

(a) Wie groß ist der Konvergenzradius von L_ϕ?

(b) Zeigen Sie, dass L_ϕ eine Logarithmusfunktion ist.