1 Fouriertransformation

a) Zeigen sie, dass :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f_1 + f_2) &= \mathfrak{F}(f_1) + \mathfrak{F}(f_2) \\ \mathfrak{F}(\alpha f_1) &= \alpha \mathfrak{F}(f_1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mphLösung

Für f gerade :

$$F(\omega) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t) dt \quad \rightarrow \text{ gerade}$$

Für f ungerade :

$$F(\omega) = -2i \int_0^\infty f(t) \sin(\omega t) dt \quad \rightarrow \text{ ungerade}$$

b) Zeigen sie, dass :

$$f'(t) \leftrightarrow i\omega F(\omega)$$

Lösung

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} &= \left[\underbrace{[e^{-i\omega t} f(t)]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega e^{-i\omega t}) \right] \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

c) Stellen sie die Sinus-Reihe $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^2}$ in der Form $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ dar.

Lösung

$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^2} \Rightarrow \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{1}{k^2}$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = -\frac{i}{2k^2} \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = -\frac{i}{2k^2} \\ \Rightarrow f(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{für} \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

d) Stellen sie die Cosinus-Reihe $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 4kt}{k^3}$ in der Form $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ dar

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \Rightarrow \quad \cos(4kt) = \frac{1}{2}(e^{i4kt} + e^{-i4kt}) \\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 4kt}{k^3} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^3}(e^{i4kt} + e^{-i4kt}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^3} e^{i4kt} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^3} e^{-i4kt} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{mit} \quad c_k = \begin{cases} \frac{1}{2k^3} & falls \quad k = \pm 4n \\ 0 & sonst \end{cases}
\end{aligned}$$

e) Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f durch $f(x) = |x|$, für $-\pi \leq x \leq \pi$. Berechnen sie die Koeffizienten der zugehörigen reelen Fourier- Reihe $F(x)$

Lösung

$f = |x|$ ist eine gerade Funktion $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} xdx = \pi$$

für $n > 0$ ist

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} . \frac{1}{n^2} [\cos nx + nx \sin nx]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = -\frac{4}{\pi n^2} \quad \text{für} \quad n = 1, 3, 5... \quad \text{sonst} \quad 0
\end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$$

f) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von f

$$f(t) = \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\pi}} \exp[-\mathrm{a}(\mathrm{t}+\mathrm{b})^2] + \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\pi}} \exp[-\mathrm{a}(\mathrm{t}-\mathrm{b})^2] \quad \text{mit} \quad \mathrm{a} > 0$$

Lösung

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\pi}} \mathrm{exp}[-\mathrm{a}(\mathrm{t}+\mathrm{b})^2] + \mathrm{exp}[-\mathrm{a}(\mathrm{t}-\mathrm{b})^2]\mathrm{exp}(-\mathrm{i}\omega\mathrm{t})\mathrm{dt} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\pi}} \mathrm{exp}[-\mathrm{a}(\mathrm{t}+\mathrm{b})^2 - \mathrm{i}\omega\mathrm{t}] + \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\pi}} \mathrm{exp}[-\mathrm{a}(\mathrm{t}-\mathrm{b})^2 - \mathrm{i}\omega\mathrm{t}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\pi}} \mathrm{exp} \left. \quad -\mathrm{a}\left[\mathrm{t}+ \left. \quad \mathrm{b}+\frac{\mathrm{i}\omega}{2\mathrm{a}}\right)\right]^2 + \mathrm{ib}\omega - \frac{\mathrm{w}^2}{4\mathrm{a}}\right) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\pi}} \mathrm{exp} \left. \quad -\mathrm{a}\left[\mathrm{t}+ \left. \quad -\mathrm{b}+\frac{\mathrm{i}\omega}{2\mathrm{a}}\right)\right]^2 - \mathrm{ib}\omega - \frac{\mathrm{w}^2}{4\mathrm{a}}\right) \\
&= \mathrm{exp} \left. \quad \mathrm{ib}\omega - \frac{\omega^2}{4\mathrm{a}}\right) + \mathrm{exp} \left. \quad -\mathrm{ib}\omega - \frac{\omega^2}{4\mathrm{a}}\right) \\
&= 2\cos(\mathrm{b}\omega)\mathrm{exp} \left. \quad -\frac{\omega^2}{4\mathrm{a}}\right)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
& -a(t \pm b)^2 - i\omega t \\
=\ & -a\left[t^2 + \left. \quad \pm 2b + \frac{i\omega}{a}\right) t + b^2\right] \\
=\ & -a\left[t^2 + \left. \quad \pm 2b + \frac{i\omega}{a}\right) t + \left. \quad \pm b + \frac{i\omega}{a}\right)^2 + b^2 - \left. \quad \pm b + \frac{i\omega}{a}\right)^2\right] \\
=\ & -a\left[t + \left. \quad \pm b + \frac{i\omega}{a}\right)^2 \mp \frac{ib\omega}{a} + \frac{\omega^2}{4a^2}\right] \\
=\ & -a(\tau)^2 \pm ib\omega - \frac{\omega^2}{4a^2} \quad \text{mit} \quad \tau = t + \left. \quad \pm b + \frac{i\omega}{a}\right)
\end{aligned}
$$

und

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\pi}} \mathrm{exp}(-\mathrm{at}^2) = 1
$$

2 Dirac-Distribution

Für die Dirac-Distribution gilt:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)
$$

Nehmen Sie an, dass $f(x)$ in eine Taylor- Reihe um die Punkt x_0 entwickelt werden kann. Zeigen Sie, dass :

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda^2}}\mathrm{exp}\quad \left. \frac{-\mathrm{x}^2}{2\lambda^2}\right) = \delta(\mathrm{x})$$

Lösung :
Wir definieren:

$$\delta_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda^2}}exp\quad \left. \frac{-x^2}{2\lambda^2}\right)$$

Die Taylor Reihe von $f(x)$ ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Die Dirac-Distribution ist dann :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\lambda(x-x_0)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)(x-x_0)^n dx$$

Da :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\lambda(x)x^n dx = \begin{cases} = 0 \;\; n \;\text{ ungerade} \\ \propto \lambda^n \;\; n \;\text{ gerade} \end{cases}$$

Für $\lambda \to 0$ nur den Term bei $n = 0$ ist von Bedeutung. Deswegen bekomn wir:

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\lambda(x-x_0)f(x)dx = f(x_0) \tag{1}$$

3 Laplacetransformationen

Lösen sie mittels Laplace-Transformation das Afangswertproblem :

a)

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 32e^{-t}\cos(4t), \qquad y(0) = y_0\dot{y}(0) = \delta y_0$$

Lösung

$$\begin{aligned}(s^2y(s) - sy(0^+) - \dot{y}(0^+)) - 6(sy(s) - y(0^+)) + 9y(s) &= 32\mathfrak{L}[\cos(4t)](s+1) \\ &= 32\frac{s+1}{(s+1)^2+16}\end{aligned}$$

$$y(s) = \underbrace{\frac{sy_0 - 6y_0 + \delta y_0}{s^2 - 6s + 9}} + \underbrace{\frac{32(s+1)}{((s+1)^2+16)(s^2-6s+9)}}$$

PBZ 1:

$$\begin{aligned}\frac{sy_0 - 6y_0 + \delta y_0}{s^2 - 6s + 9} &= \frac{A}{(s-3)}\frac{B}{(s-3)^2} \\ sy_0 - 6y_0 + \delta y_0 &= A(s-3) + B \ \forall \ s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Mit: } s &= 3 \quad \Rightarrow -3y_0 + \delta y_0 = B \\ s &= 0 \quad \Rightarrow -6y_0 + \delta y_0 = -3A + B \Rightarrow A = \frac{2}{9} \\ \Rightarrow A &= y_0 \\ \frac{sy_0 - 6y_0 + \delta y_0}{(s-3)^2} &= \frac{y_0}{s-3}\frac{-3y_0 + \delta y_0}{(s-3)^2}\end{aligned}$$

PBZ 2:

$$\frac{32(s+1)}{((s+1)^2+16)(s^2-6s+9)} = \frac{32(s+1)}{((s+1)^2+16)(s+1-4)^2} \quad \text{mit} \quad t = s+1$$

$$\begin{aligned}&= \frac{32t}{(t^2+16)(t-4)^2} = \frac{A}{t-4} + \frac{B}{(t-4)^2} + \frac{C_1t + D_1}{t^2+16} \\ &= A(t-4)(t^2+16) + B(t^2+16) + (C_1t + D_1)(t-4)^2 \ \ \forall \ t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Mit: } t &= 4 \quad \Rightarrow 128 = 32B \\ t &= 0 \quad \Rightarrow 0 = -64A + 16B + 16D_1 \\ \Rightarrow A &= y_0 \\ t &= 2 \quad \Rightarrow 64 = -40A + 20B + 8C_1 + 4D_1 \\ t &= -2 \quad \Rightarrow -64 = -120A + 20B - 72C_1 + 36D_1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = 0, B = 4, C_1 = 0, D_1 = -4$$

$$\frac{32(s+1)}{((s+1)^2+16)(s^2-6s+9)} = \frac{4}{(s-3)^2} + \frac{-4}{(s+1)^2+16}$$

Zus :

$$y(s) = \frac{y_0}{s-3}\frac{-3y_0+\delta y_0}{(s-3)^2} + \frac{4}{(s-3)^2} + \frac{-4}{(s+1)^2+16}$$

$$y(t) = y_0 e^{3t} + (-3y_0 + \delta y_0 + 4)te^{3t} - e^{-t}\sin(4t)$$

b)

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2t} + te^{-t}, \qquad y(0) = 0\dot{y}(0) = 0$$

Lösung

$$(s^2 y(s) - sy(0^+) - \dot{y}(0^+)) + 4(sy(s) - y(0^+)) + y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{d}{ds}\frac{1}{s+1}$$

$$y(s) = \frac{1}{(s+2)^3} - \frac{1}{(s+1)^2((s+1)+1)^2}$$

Trafo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s+2)^3} \quad &\rightarrow \quad \frac{1}{2!}t^2 e^{-2t} \\
\frac{1}{(\widehat{s}+2)^2} \quad &\rightarrow \quad te^{-t} \;\; \text{mit} \;\; \widehat{s} = s+1 \\
\frac{1}{\widehat{s}}\frac{1}{(\widehat{s}+2)^2} \quad &\rightarrow \quad \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau = -te^{-t} + 1 \\
\frac{1}{\widehat{s}}\left[\frac{1}{\widehat{s}}\frac{1}{(\widehat{s}+2)^2}\right] \quad &\rightarrow \quad \int_0^t (\tau - \tau e^{-\tau} - e^{-\tau} + 1)d\tau = te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{-2t} - e^{-t}(te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2)$$