1 Matrix exponential

Berechnen Sie die Lösung des Anfangwertproblems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

für $\mathbf{A}$:

a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{D} + \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{D}+\mathbf{N})t} = e^{\mathbf{D}t}e^{\mathbf{N}t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3t & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 3e^t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 3e^t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\exp(\mathbf{A}\mathrm{t}) = \exp\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{t} \right] = \begin{pmatrix} \exp(1 & 0)t & 0 \\ (1 & 1)t & 0 \\ 0 & 0 & e^2 t \end{pmatrix}$$

$$\exp\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{t} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{t}\right] = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t + \mathbb{O}\right]$$
$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\mathbf{x}_0$$

2 Zeitgeordnete Exponential

Berechnen Sie der zeitgeordnete Exponential der Matrix:

a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 2t^2 \end{pmatrix}$$

Da $[\mathbf{A}(s),\ \mathbf{A}(t)] = 0$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\mathcal{T}e^{\int_0^t ds\mathbf{A}(s)} = e^{\int_0^t ds\mathbf{A}(s)}$$

Wir berechnen also das Exponential von

$$\mathbf{B}(t) = \int_0^t ds\mathbf{A}(s) = t^2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}t \end{pmatrix}$$
$$e^{\mathbf{B}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^n}{n!}$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $[\mathbf{A}(s),\ \mathbf{A}(t)] = 0$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\mathcal{T}e^{\int_0^t ds\mathbf{A}(s)} = e^{\int_0^t ds\mathbf{A}(s)}$$

Wir berechnen also das Exponential von

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(t) &= \int_0^t ds\mathbf{A}(s) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3}t^2 \\ 8t & 0 \end{pmatrix} \\
e^{\mathbf{B}}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}
\end{aligned}$$

3 Fixpunkt, Linearisierung

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte des DGL-Systems und untersuchen sie deren Stabilität für die Parameterwerte $p = -1, 0, 2$.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= px(y^2 - 1) + y \\
\dot{y} &= -x
\end{aligned}$$

Lösung:

Bestimmung der Fixpunkte:

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{x} = px(y^2 - 1) + y \\
0 &= \dot{y} = -x \quad \Rightarrow x = 0 \quad \Rightarrow y = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Fixpunkt ist $x_F = (0, 0)$

Die Jacobi-Matrix ist:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} p(y^2 - 1) & 2px + 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobi Matrix und Eigenwerte ausrechnen für $p = -1, 0, 2$:

$$\begin{aligned}
p &= -1 : \mathbf{J}(\mathbf{x}_F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_{1/2} &= \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) \Rightarrow \mathbf{x}_F \text{ist ein instabiler Fixpunkt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p &= 0 : \mathbf{J}(\mathbf{x}_F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_{1/2} &= \pm i \Rightarrow \mathbf{x}_F \text{ist ein elliptische Fixpunkt}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p &= 2 : \mathbf{J}(\mathbf{x}_F) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_{1/2} &= -1 \Rightarrow \mathbf{x}_F \text{ist ein stabiler Fixpunkt}
\end{aligned}
$$

b) Bestimmen sie die Fixpunkte des DGL-Systems und untersuchen Sie deren Stabilität. Wie lautet der Linearisierung des Systems am Fixpunkt?

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x^2 + 2y - 4 \\
\dot{y} &= -2xy
\end{aligned}
$$

Lösung :

Bestimmung der Fixpunkte:

$$
\begin{aligned}
0 &= \dot{x} = x^2 + 2y - 4 && (1) \\
0 &= \dot{y} = -2xy \quad \Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0 && (2)
\end{aligned}
$$

Nach einsetzen von 2 in 1 findet man die Fixpunkte $P_1 = (0,2)$, $P_2 = (2,0)$, $P_3 = (-2,0)$.

Die Jacobi-Matrix ist :

$$
\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ -2y & -2x \end{pmatrix}
$$

Ausgewertet an der Fixpunkte ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (0,2) : \mathbf{J}(\mathbf{x}_F) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_{1/2} &= \pm i2\sqrt{2} \Rightarrow \mathbf{x}_F \quad \text{ist ein elliptischer Fixpunkt}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_2 &= (2,0) : \mathbf{J}(\mathbf{x}_F) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\
\lambda_{1/2} &= \pm 4 \Rightarrow \mathbf{x}_F \quad \text{ist ein hyperbolischer Fixpunkt}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (-2,0) : \mathbf{J}(\mathbf{x}_F) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \\
\lambda_{1/2} &= \pm 4 \Rightarrow \mathbf{x}_F \quad \text{ist ein hyperbolischer Fixpunkt}
\end{aligned}
$$

c) Gegeben ist die DGL:

$$\ddot{x} = -\sin(x)$$

Schreiben Sie die DGL als System erster Ordnung der Form $g'(x) = F(g(x))$. Bestimmen Sie die Fixpunkte und deren Stabilität. Wie lautet die Linearisierung von F am Fixpunkt?

Lösung:

Wir setzen $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{x}$. Dann lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin(y_1) \end{pmatrix}$$

Berechnung der Fixpunkte des DGL Systems:

$$\begin{aligned} 0 &= y_2 \Rightarrow y_2 = 0 \\ 0 &= -\sin(y_1) \Rightarrow y_1 = k\pi, \quad \text{wobei} \quad k \in \mathbb{Z}_0 \end{aligned}$$

Die Fixpunkte sind: $P_k = (0, k\pi)$

Die Jacobi-Matrix ist der Linearisierung des Systems:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(y_2) & 0 \end{pmatrix}$$

Ausgewertet an der Fixpunkt ergibt sich:

$$\mathbf{J}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind:

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= \pm i \ \text{ für } k \text{ gerade } \Rightarrow \text{ elliptischer Fixpunkt} \\ \lambda_{1/2} &= \pm 1 \ \text{ für } k \text{ ungerade } \Rightarrow \text{ hyperbolischer Fixpunkt} \end{aligned}$$

4 Potenzreihen

Lösen sie das Anfangswertproblem mittels Potenzreihenansatz:

a)

$$(x^2-1)\ddot{y}(x)+x\dot{y}(x)-\frac{1}{4}y(x)=0, \qquad y(0)=1 \;\; \dot{y}(0)=\frac{1}{2}$$

Lösung :

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k \\ y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1} \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k\, x^{k-2} \end{aligned}$$

in DGL :

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2-1)\ddot{y}(x)+x\dot{y}(x)-\frac{1}{4}y(x) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,a_k\,x^k+\sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,a_k\,x^{k-2}+\sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,x^k-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k \\ &= (-2a_2-\frac{1}{4}a_0)_0x^0+(-6a_3+a_1-\frac{1}{4}a_1)_1x^1 \\ &+ \sum_{-k=2}^{\infty} \underbrace{k(k\,(k-1)\,a_k-(k+2)(k+1)\,a_{k+2}+ka_k-\frac{1}{4}a_k)_k}_{((k^2-\frac{1}{4}))a_k-(k+2)(k+1)a_{k+2}} x^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (-2a_2-\frac{1}{4}a_0) \Rightarrow a_2=-\frac{1}{8}a_0 \\ 0 &= (-6a_3+a_1-\frac{1}{4}a_1)_1 \Rightarrow a_3=-\frac{1}{8}a_1 \\ 0 &= ((k^2-\frac{1}{4})a_k-(k+2)(k+1)a_{k+2})_k \quad \text{Für} \quad k\geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{k+2} &= \frac{k^2-\frac{1}{4}}{(k+2)(k+1)}a_k = \frac{(\frac{1}{2}-(k+1))(\frac{1}{2}-k)}{(k+2)(k+1)}a_k \\
&= \frac{(\frac{1}{2}-(k+1))(\frac{1}{2}-k)}{(k+2)(k+1)}\frac{(\frac{1}{2}-(k-1))(\frac{1}{2}-(k-2))}{k(k-1)}a_{k-2} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ k+2 \end{pmatrix} \frac{2}{-\frac{1}{4}} \begin{cases} -2a_3 \text{ für } k \text{ ungerade} \\ \\ a_2 \text{ für } k \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Potenzreihenansatz im A.B. :$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}$

Damit :

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{8} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{2l} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2l \end{pmatrix} \\
a_3 &= \frac{1}{16} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{2l+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2l+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zusammen :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} x^k$$

b)

$$(1+2x)y'(x) + 2y(x) - 1 = 0, \qquad y(0) = 0$$

Lösung: Potenreiheansatz :

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k \\
y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1}
\end{aligned}$$

in DGL:

$$\begin{aligned}
0 &= (1+2x)y'(x) + 2y(x) - 1 = (1+2x)\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k - 1 \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\, a_{l+1}(l+1)\, x^l + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x^k - 1 \\
&= (a_1 + 2a_0 - 1)x^0 + \sum_{k=1}^{\infty}((k+1)a_{k+1} + (2k+2)a_k)x^k
\end{aligned}$$

Koeffiezientenvergleich:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 + 2a_0 - 1 \Rightarrow a_1 = -2a_0 + 1 \\ 0 &= (k+1)(a_{k+1} + 2a_k) = 0, \quad k \geq 1 \Rightarrow a_{k+1} = -2a_k \;\; k \geq 1 \end{aligned}$$

A.B. $a_0 = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_1 &= 1 \\ a_{k+1} &= (-1)^k 2^k, \;\; k \geq 1 \end{aligned}$$

c)

$$xy'(x) = (x+2)y(x)$$

Zusammen :

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2^{k-1} x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} (-2x)^l$$

Lösung:

Potenreiheansatz :

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, x^k \\ y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \, a_k \, x^{k-1} \end{aligned}$$

in DGL:

$$\begin{aligned} 0 &= xy'(x) - (x+2)y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \, a_k \, x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, x^{k+1} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \, a_k \, x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \, a_k \, x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \, x^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} k \, a_k \, x^k \\ &= (-2a_0) x^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (k a_k - a_{k-1} - 2a_k) \, x^k = 0 \quad \forall \, x \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert :

$$\begin{aligned} 0 &= -2a_0 \Rightarrow a_0 = 0 \\ 0 &= ka_k - a_{k-1} - 2a_k \quad \text{für} \;\; k \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für} \;\; k = 1 : 0 &= (1-2)a_1 - a_0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ \text{für} \;\; k = 2 : 0 &= (2-2)a_2 - a_1 = 0 \quad \text{für} \;\; \forall \;\; a_2 \\ \text{für} \;\; k > 2 : a_k &= \frac{a_{k-1}}{k-2} = \frac{1}{k-2}\frac{1}{k-3}a_{k-2} = \cdots = \frac{a_2}{(k-2)!} \end{aligned}$$

Zusammen :

$$y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_2}{(\underbrace{k-2}_{l}})!x^k = a_2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{l+2}}{l!}$$