Lösungen zu Koordinatentrafo und Integration im $\mathbb{R}^n$

für Freitag, 18.9.09
von Carla Zensen

Aufgabe 1: Verschiedene Parametrisierungen

a) **Zylinderkoordinaten**

$$D\Psi(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \partial_\rho\Psi & \partial_\varphi\Psi & \partial_z\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\rho\Psi_1 & \partial_\varphi\Psi_1 & \partial_z\Psi_1 \\ \partial_\rho\Psi_2 & \partial_\varphi\Psi_2 & \partial_z\Psi_2 \\ \partial_\rho\Psi_3 & \partial_\varphi\Psi_3 & \partial_z\Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det D\Psi = \rho\cos^2 + \rho\sin^2 = \rho$

Das lokale n-Bein sind die normierten Spaltenvektoren der Jakobimatrix $D\Psi$:
$e_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ und $e_z = (0,0,1)$ sind schon normiert.
Der Betrag des 2. Spaltenvektors ist $\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + 0} = \sqrt{\rho^2} = \rho$. Damit erhalten wir für den letzten Vektor des Dreibeins:
$e_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

b) **Kegelkoordinaten**

$$D\Psi(\varphi,z) = \begin{pmatrix} \partial_\varphi\Psi & \partial_z\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z\frac{R}{h}\sin\varphi & \frac{R}{h}\cos\varphi \\ z\frac{R}{h}\cos\varphi & \frac{R}{h}\sin\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det((D\Psi)^T\cdot D\Psi)} = \det\begin{pmatrix} z^2\frac{R^2}{h^2}\cos^2\varphi + z^2\frac{R^2}{h^2}\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{h^2}+1 \end{pmatrix} = z\frac{R}{h}\cdot\sqrt{\frac{R^2}{h^2}+1}$$

Das Dreibein berechnet sich analog a und c

c) **Toruskoordinaten**

Toruskoordinaten sind ein bisschen ekliger:

$$D\Psi(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_\rho\Psi & \partial_\theta\Psi & \partial_\varphi\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -(R+r\cos\theta)\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & (R+r\cos\theta)\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Um uns die Berechnung der Funktionaldeterminante zu erleichtern, benutzen wir, dass man einen Faktor aus einer Zeile oder Spalte vor die Determinante ziehen darf. Wir ziehen also den Faktor r aus der zweiten Spalte der Jakobimatrix und den Faktor $(R + r\cos\varphi)$ aus der dritten Spalte vor die Determinante (Man kann aber auch einfach die Determinante normal ausrechnen und die beiden Faktoren nachher ausklammern):

$\det D\Psi = r\cdot(R+r\cos\varphi)\cdot\det\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} = r\cdot(R+r\cos\varphi)\cdot$
$(-\cos^2\varphi\sin^2\theta - \sin^2\varphi\cos^2\theta - \sin^2\varphi\sin^2\theta - \cos^2\varphi\cos^2\theta) = r\cdot(R+r\cos\varphi)\cdot(-\sin^2\theta - cos^2\theta) = -r\cdot(R+r\cos\varphi)$

$(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ ist schon normiert.

Der Betrag des 2. Spaltenvektors ist $\sqrt{r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta} = r$. Damit erhalten wir für den zweiten Vektor des Dreibeins:
$(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$

Der Betrag des 3. Spaltenvektors ist $(R + r\cos\theta)$. Damit erhalten wir für den dritten und letzten Vektor des Dreibeins:
$(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

Aufgabe 2: Koordinatentransformation

a)

- Man löst die Gleichungen $\xi_1\xi_2 = x_1$ und ξ_2^2 nach ξ_1 und ξ_2 auf und erhält

$$\Psi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_2}} \\ \sqrt{x_2} \end{pmatrix}$$

- $D\Psi(\xi) = \frac{\partial(\Psi_1,\Psi_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_2}} & -\frac{x_1}{2\sqrt{x_2^3}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \end{pmatrix} (x = \Phi(\xi)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi_2} & -\frac{\xi_1}{2\xi_2^2} \\ 0 & \frac{1}{2\xi_2} \end{pmatrix}$

- Das unnormierte Zweibein lässt sich einfach ablesen aus den Spaltenvektoren von $D\Psi(x)$:

$$\eta_1(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}, 0\right) \qquad \eta_2(x) = \left(-\frac{x_1}{2\sqrt{x_2^3}}, \frac{1}{2\sqrt{x_2}}\right)$$

und daraus das normierte Zweibein:

$$e_1 = (1, 0) \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(-x_1, x_2)$$

b)

- Auch hier löst man das einfache Gleichungssystem $x_1 = \xi_1(1 - \xi_2)$ und $x_2 = \xi_1\xi_2$ und erhält

$$\Phi : V \to U \qquad \Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2/(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

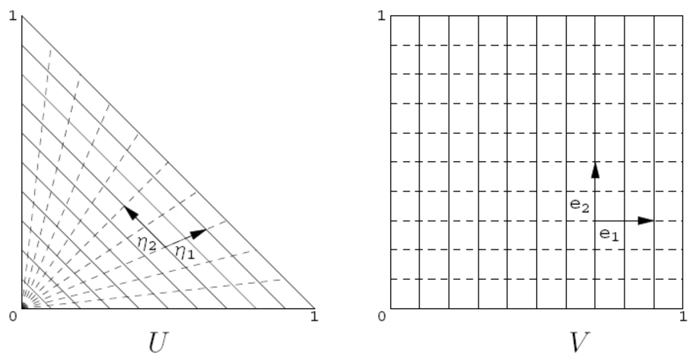
- 

Abbildung 1: U und V mit Koordinatenlinien

-

$$D\Psi(\xi) = \begin{pmatrix} 1 - \xi_2 & -\xi_1 \\ \xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} \qquad D\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{x_2}{(x_1+x_2)^2} & \frac{x_1}{(x_1+x_2)^2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Integration über Normalbereiche

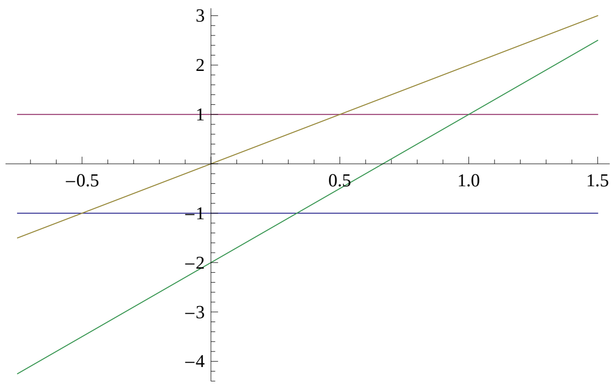
(a) 

Abbildung 2: Plot des Bereichs B

Aus der Menge ergeben sich folgende Ungleichungungen:

$$-1 \leq y \leq 1 \qquad \frac{y}{2} \leq x \leq \frac{y+2}{3}$$

also folgt das Doppelintegral zu $\int_B f(x,y)dB = \int\limits_{-1}^{1} \int_{y/2}^{(y+2)/3} 4x^3 dxdy = \int\limits_{-1}^{1} \left[x^4\right]_{y/2}^{(y+2)/3} dy = \int\limits_{-1}^{1} (\frac{(y+2)^4}{81} - \frac{y^4}{16})dy = \left[\frac{(y+2)^5}{5 \cdot 81} - \frac{y^5}{80}\right]_{-1}^{1} = \frac{371}{648}$

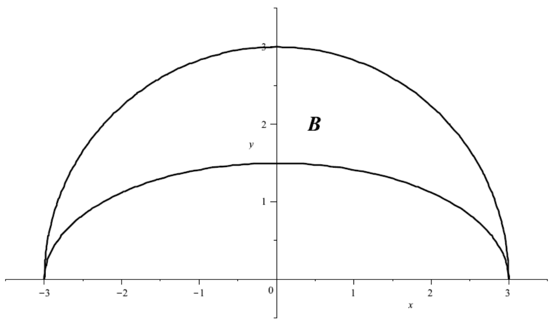
(b) 

Abbildung 3: Plot des Bereichs F

Die erste Ungleichung schränkt auf die obere Halbebene ein, die zweite Ungleichung schränkt auf die Kreisscheibe mit Radius 3 ein und die dritte Ungleichung nimmt davon alle Punkte im Inneren der Ellipse mit der großen Halbachse 3 entlang der x-Achse und der kleinen Halbachse $\frac{3}{2}$ entlang der y-Achse aus.

B kann also dargestellt werden als

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}\right\}$$

Damit ist das Doppelintegral

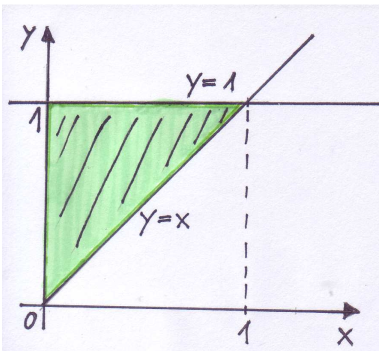
$\int_F f(x,y)dF = \int\limits_{-3}^{3} \left(\int\limits_{\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} x^2 y \, dy \right) dx = \int\limits_{-3}^{3} x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dx = \int\limits_{-3}^{3} (\frac{27}{8}x^2 - \frac{3}{8}x^4)dx = \left[\frac{9}{8}x^3 - \frac{3}{40}x^5)\right]_{-3}^{3} = \frac{243}{10}$

Aufgabe 4: Mehrdimensionale Integration

(a) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^2 [\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + xz^2]_0^3 dydz =$
$\int_0^1 \int_0^2 (9+3y^2+3z^2) dydz = \int_0^1 [9y + y^3 + 3yz^2]_0^2 dz =$
$\int_0^1 [26+6z^2] dz = [26z + 2z^3]_0^1 = 26 + 2 = 28$

(b) $\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} x^2 y\, dydx =$
$\int_1^2 [\frac{1}{2}x^2y^2]_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^3-1)\, dx = \frac{1}{2}[\frac{x^4}{4} - x]_1^2 =$
$\frac{1}{2}((4-2) - (\frac{1}{4} - 1)) = \frac{11}{8}$

(c) $\int_0^1 \int_x^1 xe^{y^3}\, dydx$
Dieses Integral ist ein gutes Beispiel für ein Integral, dessen Integrationen vertauscht werden sollten. Wer weiß schon, was $\int e^{y^3} dy$ ist?
Beim Vertauschen der Integrationen müssen wir die Integrationsgrenzen verändern, die Fläche, über die wir integrieren, muss aber gleich bleiben.
Die Fläche, über die wir integrieren, ist uns durch die Integrationsgrenzen gegeben. Es gilt: $0 \leq x \leq 1$ und $x \leq y \leq 1$. Um eine bessere Anschauung zu haben, zeichnen wir uns diese Fläche:



Wir sehen, dass man die gleiche Fläche auch mit den Bedingungen $0 \leq y \leq 1$ und $0 \leq x \leq y$ erhält. (Anschaulich kann man sagen, dass man die Fläche in Streifen einteilt und diese mit der äußeren Integration aufsummiert. Anfangs- und Endpunkte der Streifen sind die Grenzen der inneren Integration. Man kann die Streifen senkrecht oder waagrecht legen , was der unterschiedlichen Integrationsreihenfolge entspricht.)
Die neuen Grenzen von y hängen jetzt nicht mehr von x ab und man kann schreiben:

$\int_0^1 \int_x^1 xe^{y^3}\, dydx = \int_0^1 \int_0^y xe^{y^3}\, dxdy = \int_0^1 [\frac{1}{2}x^2e^{y^3}]_0^y dy = \int_0^1 (\frac{1}{2}y^2e^{y^3}) dy = [\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{y^3}]_0^1 =$
$\frac{1}{6}[e-1]$

<u>Alternative:</u>
Wenn man nicht zeichnen will, kann man sich das ganze auch nur an den Grenzen überlegen:

$0 \leq x \leq 1$ und $x \leq y \leq 1$ sind die alten Grenzen. Wir wollen, dass die Integration über y als letztes ausgeführt wird , deshalb dürfen die Grenzen für y nicht mehr von x abhängen. Wir überlegen: Was sind die minimalen und maximalen Werte für y? Es sind wohl $y = 0$ für $x = 0$ und $y = 1$, also $0 \leq y \leq 1$.
Um die Grenzen für x zu erhalten, betrachten wir die alten Grenzen für y: $x \leq y \leq 1$ bedeutet $x \leq y$; $0 \leq x$ gilt noch immer, weil die Untergrenze von x über keine Gleichung mit y zusammenhängt, also $0 \leq x \leq y$. Dann führt man das Integral mit den neuen Grenzen und vertauschten Integrationen wie oben gezeigt aus.

(d) $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_a^b dx = \int_0^1 \left[\frac{e^{y\ln x}}{\ln x}\right]_a^b dx = \int_0^1 \int_a^b e^{y\ln x}dydx = \int_0^1 \int_a^b x^y dydx \overset{Fubini}{=}$
$\int_a^b \int_0^1 x^y dxdy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{1+b}{1+a}$
denn x^y ist auf $[0,1] \times [a,b]$ stetig und der Satz von Fubini ist anwendbar.

Aufgabe 5: Satz von Fubini

- $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy$
  Nebenrechnung (mit partieller Integration): $\int \frac{x-y}{(x+y)^3}dx = \int \frac{x}{(x+y)^3} - \frac{y}{(x+y)^3}dx = \frac{-x}{2(x+y)^2} - \int \frac{-1}{2(x+y)^2}\,dx - y \cdot \frac{-1}{2(x+y)^2} = \frac{-x}{2(x+y)^2} - \frac{1}{2(x+y)} + y \cdot \frac{1}{2(x+y)^2} = \frac{-x}{(x+y)^2}$
  $=> \int_0^1 [\frac{-x}{(x+y)^2}]_0^1 \,dy = \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2}\,dy = [\frac{1}{1+y}]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$
- $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dydx$

  Nebenrechnung (mit partieller Integration): $\int \frac{x-y}{(x+y)^3}dy = \int \frac{x}{(x+y)^3} - \frac{y}{(x+y)^3}dy = \frac{-x}{2(x+y)^2} - \int \frac{+1}{2(x+y)^2}\,dy - y \cdot \frac{-1}{2(x+y)^2} = \frac{-x}{2(x+y)^2} + \frac{1}{2(x+y)} + y \cdot \frac{1}{2(x+y)^2} = \frac{+y}{(x+y)^2}$
  $=> \int_0^1 [\frac{+y}{(x+y)^2}]_0^1 \,dx = \int_0^1 \frac{+1}{(1+x)^2}\,dx = [\frac{-1}{1+x}]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = +\frac{1}{2}$

Der Satz von Fubini scheitert hier also. Deswegen kann es sich bei der Menge nicht um einen Normalbereich handeln!

Aufgabe 6: Volumen und Schwerpunkt

Das Volumen beträgt ein Achtel Kugelvolumens. Alternativ könnte man das Volumen auch durch das Integral

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$$

herleiten und kommt auf das selbe Ergebnis:

$$V_{KO} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi 1^3 = \frac{\pi}{6}$$

Aufgrund der Symmetrie müssen alle Schwerpunktskoordinaten gleich sein: $s_x = s_y = s_z$
Also wählen wir die einfachste Komponente und erhalten:

$$s_z = \frac{6}{\pi}\int_K zdxdydz = \frac{6}{\pi}\int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi (r^2\sin\theta)(r\cos\theta) = \frac{3}{8}$$

Der Schwerpunkt ist somit

$$S = \frac{3}{8}(1,1,1)$$

Aufgabe 7: Trägheitsmoment einer Kugel

Wir benutzen die angegebene Formel und schreiben dV mithilfe des Transformationssatzes um in $dV = dxdydz = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$ (Transformation in Kugelkoordinaten). Außerdem werden auch $x = r\sin\theta\cos\varphi$ und $y = r\sin\theta\sin\varphi$ durch Kugelkoordinaten ausgedrückt. Schließlich muss man nur noch die richtigen Integrationsgrenzen setzen:

$$I_z = \rho\int_V (x^2+y^2)dV = \rho\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left((r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2\right) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr =$$

$$= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^4 (\sin\theta)^3 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) d\theta d\varphi dr = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^4 (\sin\theta)^3 d\theta d\varphi dr =$$

$$= \frac{2\pi\rho}{5} R^5 \int_0^\pi (\sin\theta)^3 d\theta = \frac{2\pi\rho}{5} R^5 \int_0^\pi \sin\theta (1 - \cos^2\theta) d\theta = \frac{2\pi\rho}{5} R^5 \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta \right]_0^\pi = \frac{2\pi\rho}{5} R^5 \frac{4}{3}$$

Die Massendichte ρ berechnet man so:
$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ und setzt den Ausdruck in I_z ein und erhält, was zu erwarten war:

$$\Rightarrow I_z = \frac{2}{5} M R^2$$

Aufgabe 8: Rotationsfläche

(a) Die Gramsche Determinante ist

$$G_\Psi : V \to [0, \infty)$$

$$\xi \mapsto \sqrt{det\, D\Psi(\xi)^T D\Psi(\xi)}$$

Wir brauchen also zunächst einmal

$$D\Psi(t, \varphi) = \frac{\partial(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)}{\partial(r, \phi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(t)\cos\varphi & -f(t)\sin\varphi \\ f'(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

wie sich direkt aus der Definition der Parametrisierung ergibt. Dies setzt man nun in die Definition der Gramschen Determinante ein:

$$G_\Psi = \sqrt{det \begin{pmatrix} 1 & f'(t)\cos\varphi & f'(t)\sin\varphi \\ 0 & -f(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(t)\cos\varphi & -f(t)\sin\varphi \\ f'(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi \end{pmatrix}} =$$

$$= \sqrt{det \begin{pmatrix} 1 + f'(t)^2 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix}} = f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}$$

(b) Es entsteht ein Doppelkegel mit Spitze im Ursprung.

(c) Ganz elementar wie in der Schule: $V_{Kegel} = \frac{1}{3} R^2 \pi h$
wobei $h = 2$ wegen den vorgegebenen Grenzen und $R = 1$, da $z(x) = 2x$.

$$V_{rot} = 2 \cdot V_{Kegel} = \frac{2}{3} \cdot 1^2 \cdot \pi \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi$$

(d) Einsetzen in das Integral mit $I = [-2, 2]$ und $f'(t) = 2$ und unter Beachtung der Symmetrie des Intervalls:

$$\int_M dS(x) = 2 \cdot 2\pi \int_0^2 f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2} dt = 4\pi \int_0^2 2t\sqrt{1+4} dt = 4\sqrt{5}\left[t^2\right]_0^2 = 16\sqrt{5}$$