Übungsaufgaben zu
Koordinatentrafo und Integration im $\mathbb{R}^n$

für Freitag, 18.9.09
von Carla Zensen

Aufgabe 1: Verschiedene Parametrisierungen

Gib zu den drei Parametrisierungen des dreidimensionnalen Raums jeweils die Jacobi-Matrix, die dazugehörige Funktionaldeterminante und das lokale n-Bein an!

a) Zylinderkoordinaten

$$\Psi : [0, \infty[\times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$(\rho, \varphi, z) \mapsto \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

b) Kegelkoordinaten

$$\Psi : [0, \infty[\times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$$
$$(\varphi, z) \mapsto \begin{pmatrix} z\frac{R}{h} \cos\varphi \\ z\frac{R}{h} \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

c) Toruskoordinaten

$$[0, \infty[\times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$$
$$\Psi : (r, \theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Koordinatentransformation

a) Gegeben sind die Halbebenen $U = \left\{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 > 0\right\}$ und $V = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\right\}$ und die **Koordinatentransformation** $\Phi : U \to V$

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_2 \\ \xi_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Berechne die Umkehrtransformation
  $\Psi(x_1, x_2) = (\Psi_1(x_1, x_2), \Psi_2(x_1, x_2)) = (\xi_1, \xi_2) : U \to V$ (in Abh. von x_1 und x_2)!
- Bestimme $D\Psi(\xi)$
- Bestimme das unnormierte Zweibein $\eta_1(x)$ und $\eta_2(x)$ aus $D\Psi(\xi)$ und bestimme daraus auch das normierte Zweibein $e_1(x)$ und $e_2(x)$!

b) Seien $U = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 \wedge x_2 < 1 \wedge x_1 + x_2 < 1\right\}$ und $V = \left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : 0 < \xi_1 \wedge \xi_2 < 1\right\}$ und $\Psi : V \to U$ die **Parametrisierung** von U

$$\Psi(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1(1 - \xi_2) \\ \xi_1\xi_2 \end{pmatrix}$$

- Bestimme die Umkehrtransformation $\Phi := \Psi^{-1} : U \to V$!
- Skizziere U und V und die Koordinatenlinien $\xi_1 = const.$ und $\xi_2 = const.$ in U.
- Bestimme $D\Psi(\xi)$ und $D\Phi(x)$

Aufgabe 3: Integration über Normalbereiche

a) Skizziere den Bereich

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1 \wedge \frac{y}{2} \leq x \leq \frac{y+2}{3}\right\}$$

Berechne das Integral der Funktion $f(x, y) = 4x^3$ über diesen Bereich!

b) Skizziere auch diesen Bereich:

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 25, x^2 + 9y^2 \geq 25\right\}$$

Berechne das Integral der Funktion $f(x, y) = x^2 y$ über diese Fläche!

Aufgabe 4: Mehrdimensionale Integration

Berechne folgende Integrale:

a) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$

b) $\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} x^2 y dy dx$

c) $\int_0^1 \int_x^1 x e^{y^3} dy dx$

d) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \qquad 0 < a < b$ *(Hinweis: war Hausaufgabe! Berechne das Integral, indem du den Integranden als bestimmtes Integral interpretierst!)*

Aufgabe 5: Satz von Fubini

Berechne die Integrale

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \qquad \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$$

mit der Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Welchen Schluss kann man mit dem Satz von Fubini ziehen?

Aufgabe 6: Volumen und Schwerpunkt

Berechne für den überall positiven **Kugeloktanten der Einheitskugel**

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \; x, y, z \geq 0\right\}$$

das Volumen und dann die (kartesischen) Koordinaten des Schwerpunkts. Skizziere zunächst den Körper, stelle dann eine Vermutung auf und bestätige diese durch explizites Nachrechnen!

Aufgabe 7: Trägheitsmoment einer Kugel

Wieder nützlich für die theoretische Physik:
Berechne das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel bezüglich einer beliebigen Achse mit Masse M und Radius R!
Hinweis: Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse für homogene Dichten ρ ist allgemein gegeben durch $I_z = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV$.

Aufgabe 8: Rotationsfläche

Die Parametrisierung einer Rotationsfläche M ist gegeben durch

$$\Psi : I \times (-\pi, \pi) \to M$$

$$(t, \varphi) \mapsto \Psi(t, \varphi) = \begin{pmatrix} t \\ f(t)\cos\varphi \\ f(t)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

und die zugehörige Gramsche Determinante ist

$$G_\Psi(t, \varphi) = f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}$$

a) Leite die Gramsche Determinante aus der Parametrisierung her!
(Hinweis: Definition der Gramschen Determinante nachschlagen...)

b) Gegeben sei nun eine Gerade in der x-z-Ebene: $z(x) = 2x$. Man rotiere diese Gerade nun um die z-Achse. Skizziere den entstehenden Rotationskörper für $-2 \leq z \leq 2$. Wie nennt man das entstehende Gebilde?

c) Berechne das Volumen des Rotationskörpers in den Grenzen $-2 \leq z \leq 2$!

d) Zuletzt soll nun noch die Rotationsfläche M in den selben Grenzen berechnet werden. Dazu benutze man die Formel aus der Vorlesung:

$$\int_M dS(x) = \int_I \int_{-\pi}^{\pi} G_\Psi(t, \varphi) d(t, \varphi) = 2\pi \int_I f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

mit $f(t) = 2t$.