Lösungen zu impliziten Funktionen

für Donnerstag, 17.9.09
von Carla Zensen

Aufgabe 1: Zweite Ableitung einer Auflösung

$$g''(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = -\frac{\partial_y f \cdot \left(\partial_x^2 f + \partial_y \partial_x f \cdot \partial_x g\right) - \partial_x f \cdot \left(\partial_y \partial_x f + \partial_y^2 f \cdot \partial_x g\right)}{(\partial_y f)^2}\Big|_{(x,g(x))} \overset{\partial_x g(x) = g'(x)}{=}$$

$$= -\frac{\partial_y f \cdot \left(\partial_x^2 f + \partial_y \partial_x f \cdot \left(-\frac{\partial_x f}{\partial_y f}\right)\right) - \partial_x f \cdot \left(\partial_y \partial_x f + \partial_y^2 f \cdot \left(-\frac{\partial_x f}{\partial_y f}\right)\right)}{(\partial_y f)^2}\Big|_{(x,g(x))} =$$

$$= -\frac{(\partial_y f)^2 \, \partial_x^2 f - 2\partial_y f \partial_{xy}^2 f \partial_x f + \partial_y^2 f \cdot (\partial_x f)^2}{(\partial_y f)^3}\Big|_{(x,g(x))}$$

Wobei man besonders beachten muss, dass

$$\partial_x(\partial_x f(x, g(x))) = \partial_x^2 f(x, g(x)) + \partial_y \partial_x f(x, g(x)) \partial_x g(x)$$

da die Funktion f nicht nur explizit, sondern auch implizit über g von x abhängt! $\partial_x = g'(x)$ ist durch die Aufgabenstellung bereits gegeben und muss nur eingesetzt werden. Nach der 2. Zeile wurde mit $\partial_y f$ erweitert.

Aufgabe 2: Auflösen von impliziten Funktionen

a)
- $P \in \{(x, y, z); f(x, y, z) = 0\}$, da $f(1, 0, 1) = 1 - 0^7 + 1^3 - 1^2 1 - 1 = 0$

- $\partial_x f(x, y, z) = 1 - 2xz$
  $\partial_y f(x, y, z) = -7y^6$
  $\partial_z f(x, y, z) = 3z^2 - x^2$
  $\Rightarrow$ f ist stetig differenzierbar

- $\partial_z f(1, 0, 1) = 3 \cdot 1^2 - 1^2 = 2 \neq 0$

Die implizite Funktion f(x,y,z)=0 erfüllt die Bedingungen des Satzes übr implizite Funktionen. Also lässt sich f(x,y,z)=0 in einer Umgegung von P als f(x,y,g(x,y))=0 darstellen.

$$\partial_x g(1, 0) = -\frac{\partial_x f(1, 0, 1)}{\partial_z f(1, 0, 1)} = -\frac{1 - 2}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

b) Die Funktion ist unendlich oft stetig differenzierbar (Polynom). Damit die Funktion in x nach y=g(x) auflösbar ist, muss gilt für alle Werte (x, y) mit $(x, y) \in \{(x, y); f(x, y) = 0\}$ gelten:

$$\partial_y f(x, y) \neq 0$$

Also hier:

$\partial_y f(x, y) = yx^2 + y - 2x^2 - 2 \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow x^2(y-2) + (y-2) = (y-2) \cdot (x^2+1) \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow y = 2$

Also ist die Funktion für alle $(x, y) \in \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 2 \wedge f(x, y) = 0\right\}$ nach y auflösbar.

c)
- $P \in \{(x,y,z); f(x,y,z)=0\}$, da $f(\pi,0,0) = 1 - 0 + e^0 \cdot \cos(\pi - 0) = 0$
  $\partial_x f(x,y,z) = -e^{-2z}\sin(x-y)$
  $\partial_y f(x,y,z) = e^{-2z}\sin(x-y)$
  $\partial_z f(x,y,z) = -1 - 2e^{-2z}\cos(x-y)$
  $\Rightarrow$ f ist stetig differenzierbar
  $\partial_z f(\pi,0,0) = -1 - 2e^0 \underbrace{\cos(\pi - 0)}_{=-1} = 1 \neq 0$
  Die implizite Funktion f(x,y,z)=0 erfüllt die Bedingungen des Satzes übr implizite Funktionen. Also lässt sich f(x,y,z)=0 in einer Umgegung von P nach z auflösen.
- grad $g(\pi,0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial_x f(\pi,0,0)}{\partial_z f(\pi,0,0)} \\ -\frac{\partial_x f(\pi,0,0)}{\partial_z f(\pi,0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{0}{1} \\ -\frac{0}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Der Normalenvektor entspricht dem Gradienten, da dieser immer senkrecht auf der durch f beschriebenen Fläche steht.
  Normalenvektor mit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\vec{n} = \lambda \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}(P) \overset{z.B. \lambda=1}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  Eine Ebene, die durch einen Punkt und den Normalenvektor definiert wird, findet man wie in der Schule man durch folgende Gleichung:

$$0 = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{P}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \pi \\ y - 0 \\ z - 0 \end{pmatrix} = z$$

  Also ist die gesuchte Ebene $z = 0$.

d)
- $f(0,0) = 0 + \cos 0 + \sin 0 - 0 - 1 + 0 = 0$
  $\partial_x f(x,y) = 2y - 2x\sin x^2 - 4$
  $\partial_y f(x,y) = 2x + 2y\cos y^2 + 1$
  $\Rightarrow$ f ist zweimal stetig differenzierbar
  $\partial_y f(0,0) = 1 \neq 0$
  Die implizite Funktion f(x,y)=0 erfüllt die Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen. Also lässt sich f(x,y)=0 in einer Umgegung von (0,0) nach y auflösen.
-

$$y'(0) = -\frac{\partial_x f(0,0)}{\partial_y f(0,0)} = -\frac{-4}{1} = 4$$

  $\partial_x^2 f(x,y) = 4x^2\cos x^2 - 2\sin x^2$
  $\partial_y^2 f(x,y) = 2\cos y^2 - 4y^2\sin y^2$
  $\partial_{xy}^2 f(x,y) = 2$

$$y''(0) = -\frac{(\partial_y f(0,0))^2 \partial_x^2 f(0,0) - 2\partial_y f(0,0)\partial_{xy}^2 f(0,0)\partial_x f(0,0) + \partial_y^2 f(0,0) \cdot (\partial_x f(0,0))^2}{(\partial_y f(0,0))^3} = 48$$

- Taylor-Polynom vom Grad 2:

$$T(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 = 4x + 24x^2$$

Aufgabe 3: Auflösen von Gleichungen

- das zweidimensionale Gleichungssystem kann folgendermaßen als implizite Funktion f : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ umgeschrieben werden:

$$f(y,b,c) = \begin{pmatrix} y^2 + b^2 - 2c^2 \\ y^2 + 2b^2 + c^2 - 4 \end{pmatrix} = 0$$

Nun wenden wir das Rezept aus der Vorlesung an und zeigen, dass der Satz über implizite Funktionen hier für eine Auflösung nach (b,c) anwendbar ist:

a) f(P)=0, da P Lösung des Gleichungssystems ist
b) $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, da Polynome unendlich oft stetig differenzierbar sind
c) Die Matrix
$$D_{(b,c)}f(P) = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(b,c)} = \begin{pmatrix} \partial_b f_1 & \partial_c f_1 \\ \partial_b f_2 & \partial_c f_2 \end{pmatrix} (P)$$
ist invertierbar, denn $\det \begin{pmatrix} 2b & -4c \\ 4b & 2c \end{pmatrix} = 20bc \neq 0$ für $b = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ und $c = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Also ist das Gleichungssystem nach dem Satz über implizite Funktionen nach b und c auflösbar, es existiert somit in der Umgebung von y=0 eine Funktion g(y) mit f(y,g(y))=0.

•

$$\begin{pmatrix} \partial_y b(y) \\ \partial_y c(y) \end{pmatrix} = -\left[D_{(b,c)}f(y,b,c)\right]^{-1} D_y f(y,b,c) = -\frac{1}{20bc}\begin{pmatrix} 2b & 4c \\ -4b & 2b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y \\ 2y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3\frac{y}{c(y)} \\ \frac{y}{c(y)} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Zwei implizite Funktionen

$\partial_x f_1(t,x,y) = e^{y^2 \sin x} \cdot y^2 \cos x + 6x^5y^2$
$\partial_y f_1(t,x,y) = e^{y^2 \sin x} \cdot 2y \sin x + 2x^6 y - 3t$
$\partial_x f_2(t,x,y) = 2x$
$\partial_y f_2(t,x,y) = 2yt$
Die interessierende Matrix ist laut Satz über implizite Funktionen die Ableitungsmatrix nach den Variablen, nach denen aufgelöst wird am Punkt P:

$$M = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)}(P) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$det\, M = -2 \neq 0$$

Also ist M invertierbar.

Aufgabe 5: Untermannigfaltigkeiten

a)
- Die Gleichungen sind beide unendlich oft stetig differenzierbar.
$\partial_x f(x,y,z) = 2x + y \neq 0$ für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : x = y = 0 \wedge y = -2x\}$
$\partial_x g(x,y,z) = 4x + 3y \neq 0$ für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) : x = y = 0 \wedge y = -\frac{4}{3}x\right\}$
$\Rightarrow H(x)$ ist nach x auflösbar für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) : x = y = 0 \vee y = -2x \vee -\frac{4}{3}x\right\}$
- $\partial_y f(x,y,z) = x - 1 \neq 0$ für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : x = 1\}$
$\partial_y g(x,y,z) = 3x - 2 \neq 0$ für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) : x = \frac{2}{3}\right\}$
$\Rightarrow H(x)$ ist nach y auflösbar für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) : x = 1 \vee -\frac{4}{3}x\right\}$
- $\partial_z f(x,y,z) = -1 \neq 0$ $\partial_z g(x,y,z) = -3 \neq 0 \Rightarrow H(x)$ ist nach z auflösbar für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
- $M = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x+y & x-1 \\ 4x+3y & 3x-2 \end{pmatrix}$ $det\, M = (2x+y)(3x-2) - (x-1)(4x+3) = 2x^2 - 3x + 3xy - 2y + 3$ H(x) ist nach (x,y) auflösbar für
$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) : 2x^2 - 3x + 3xy - 2y + 3 = 0\right\}$
- $M = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)} = \begin{pmatrix} 2x+y & -1 \\ 4x+3y & -3 \end{pmatrix}$
$det\, M = -3(2x+y) + (4x+3y) = -2x$ $\Rightarrow$ H(x) ist nach (x,z) auflösbar für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : x = 0\}$

b) $C \subset \mathbb{R}^3$. Es bleibt zu zeigen, dass es eine Funktion gibt, deren Nullstellengebilde reguläre Punkte sind.
Hier ist die Funktion naheliegenderweise H(x), da diese die Menge C beschreibt. Damit $H^{-1}(0)$ regulär ist, muss rang $DH(x)$ maximal sein:
$rang\,DH(x) = rang\,\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)} = rang \begin{pmatrix} 2x+y & x-1 & -1 \\ 4x+3y & 3x-2 & -3 \end{pmatrix} = 2$, da der zweite und der dritte Spaltenvektor für alle x linear unabhängig sind. Also ist der Rang maximal und somit ist C eine 1-dimensionale UMF des $\mathbb{R}^3$. Warum 1-dimensional? Laut Definition soll die Funktion H in den $\mathbb{R}^{n-p}$ abbilden, H ist aber 2-dimensional. Da $n = 3$ muss als $p = 1$ sein.

c) Setze $\phi(t)$ ein in f und g:

$$f(t,t^2,t^3) = t^2 + t^3 - t^2 - t^3 = 0 \qquad g(t,t^2,t^3) = 2t^2 + 3t^3 - 2t^2 - 3t^3 = 0$$

Also erfüllt die Kurve ϕ die Bedigung, um vollständig in H zu liegen. Da C eine eindimensionale UMF des $\mathbb{R}^3$ ist, wird die Menge eindeutig durch nur einen Parameter beschrieben. Wir wählen t.

Aufgabe 6: Existenz der Inversen

Um festzustellen, ob eine Funktion bijektiv ist, muss man nur berechnen, ob Df(x) invertierbar ist (Satz über Umkehrfunktionen):

(a) $Df(x) = 2x \Rightarrow$ invertierbar für $x \neq 0$, also kann man x^2 nur entweder auf der positiven oder der negativen Halbebene zu $\sqrt{x}$ umkehren, was uns nicht weiter wundert...

(b) $Df(\rho,\phi,z) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow\ detDf(\rho,\phi,z) = \rho(\cos\phi)^2 + \rho(\sin\phi)^2 = \rho$
Also ist diese Matrix invertierbar für $\rho > 0$, also auf der Definitionsmenge der Zylinderkoordinaten. Da es sich hier um eine Koordinatentrafo handelt, ist das vollkommen vernünftig.

(c) $D\Psi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi(R + r\cos\theta) \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi(R + r\cos\theta) \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow\ detD\Psi(r,\theta,\varphi) = -(rR + r^2\cos\theta)$
Auch diese Matrix ist invertierbar auf der Definitionsmenge der Toruskoordinaten $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times (0,2\pi) \times (0,2\pi)$

Übungsaufgaben zur Vektoranalysis

Aufgabe 7: Einfache Vektorfelder

a) s.o.

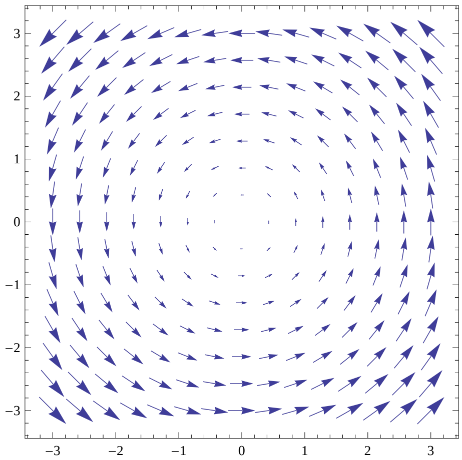

Abbildung 1: Vektorfeld f(x,y)

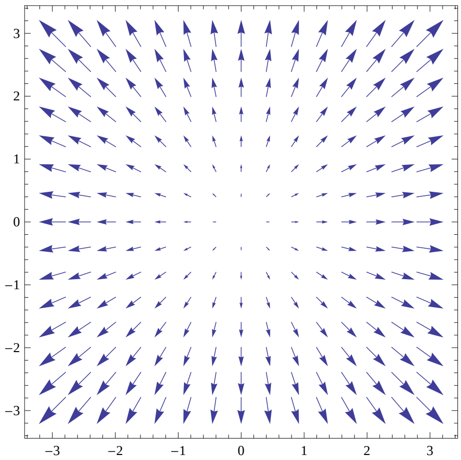

Abbildung 2: Vektorfeld g(x,y)

b)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot f(x,y) = -\partial_x y + \partial_y x = 0 \qquad \nabla \cdot g(x,y) = \partial_x x + \partial_y y = 2$$

$$rot\, f(x,y) = rot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \partial_x x + \partial_y y = 1+1 = 2 \qquad rot\, g(x,y) = rot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \partial_x y - \partial_y x = 0$$

c) Kurvenintegrale entlang C:

$$\int_C f ds = \int_1^2 f(C(t))\dot{C}(t)dt = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\cdot(-\sin t, \cos t)dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi$$

$$\int_C g ds = \int_1^2 f(C(t))\dot{C}(t)dt = \int_0^{2\pi} g(\cos t, \sin t)\cdot(-\sin t, \cos t)dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t\cos t + \sin t \cos t)dt = 0$$

Aufgabe 8: Kurze Beweise

a) $[\nabla \times (\nabla f)]_j = \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl}\partial_k\partial_l f \overset{SatzvonSchwarz}{=} -\sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jlk}\partial_l\partial_k f = -[\nabla \times (\nabla f)]_j$

b)

$$\nabla \cdot (\nabla \times v) = \nabla \cdot \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{jkl}\partial_k v_l = \sum_{j=1}^{3} \partial_j \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{jkl}\partial_k v_l =$$

$$= \sum_{jkl} \epsilon_{jkl}\partial_j\partial_k v_l \overset{SatzvonSchwarz}{=} -\sum_{jkl} \epsilon_{kjl}\epsilon\partial_k\partial_j v_l = -\nabla \cdot \nabla \times v)$$

c)

$$[\nabla \times (v_1 + v_2)]_j = \sum_{jkl} \epsilon_{jkl}\partial_k (v_1 + v_2)_l = \sum_{jkl} \epsilon_{jkl}\partial_k (v_{1,l} + v_{2,l}) =$$

$$= \sum_{jkl} \epsilon_{jkl}\partial_k v_{1,l} + \sum_{jkl} \epsilon_{jkl}\partial_k v_{2,l} = [\nabla \times v_1 + \nabla \times v_2]_j$$

d)

$$[\nabla \times \nabla \times v]_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times v)_k = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \sum_{lm} \epsilon_{klm} \partial_l v_m = \sum_{jlm} \left(\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \right) \partial_j \partial_l v_m =$$

$$= \sum_{jlm} \left(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \right) \partial_j \partial_l v_m = \sum_j \partial_j \partial_i v_j - \sum_j \partial_j \partial_j v_i = \partial_i \sum_j \partial_j v_j - \left(\sum_j \partial_j \partial_j \right) v_i =$$

$$= \partial_i \left(\nabla \cdot v \right) - \Delta v_i = \left[\nabla (\nabla \cdot v) - \Delta v \right]_i$$

e) Wähle z.B. $v(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2, y^2, z^2)$.

$$\Rightarrow \qquad \nabla \left(\nabla \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} \right) = \nabla (x+y+z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: Potentialbestimmung

a) Wir verwenden die Formel aus der Vorlesung:

$$f(x,y,z) = \int_0^z v_3(0,0,t)dt + \int_0^y v_2(0,t,z)dt + \int_0^x v_1(t,y,z)dt$$

mit $v_1 = yz \qquad \Rightarrow \qquad v_1(t,y,z) = yz$
$v_2 = \frac{z^2}{2} + xz \qquad \Rightarrow \qquad v_2(0,t,z) = \frac{z^2}{2}$
$v_3 = y(x+z) \qquad \Rightarrow \qquad v_3(0,0,t) = 0$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \int_0^y \frac{z^2}{2} dt + \int_0^x yz dt = \frac{1}{2} z^2 y + xyz + C$$

b)

- Für sternförmige Definitionsmengen (wie hier z.B. $\mathbb{R}^3$) gilt: V_p besitzt genau dann ein Potential, wenn die Rotation Null ist:

$$\nabla \times V_p = \nabla \times \begin{pmatrix} pyz + 2x \\ xz - 2y \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x \\ y - py \\ z - pz \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

  $\Rightarrow p = 1$

- $V_1 = \begin{pmatrix} yz + 2x \\ xz - 2y \\ xy \end{pmatrix}$

  Dieses Mal raten wir einfach (Vorsicht, dann muss die Vermutung aber auch bewiesen werden!):

  Beh.: $f(x,y,z) = xyz + x^2 - y^2$

  Bew.: $\nabla f(x,y,z) = \nabla(xyz + x^2 - y^2) \begin{pmatrix} yz + 2x \\ xz - 2y \\ xy \end{pmatrix} = V_1$

  Also ist f ein Potential von V_1!

- $$\int_C V_p(x)dx = \int_0^1 V_p(s(t))\dot{s}(t)dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} pt^3 + 2t \\ t^3 - 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (p+3)t^3 dt = \frac{p+3}{4}$$

Aufgabe 10: Sonne, Mond und Sterne

Ganz anschaulich heißt sternförmig, dass man innerhalb einer Menge **einen** (oder mehrere) Punkt(e) finden kann, sodass man von diesem aus alle andere Punkte durch Geraden erreichen kann, die vollständig innerhalb der Menge liegen.

Für eine Kugel oder einen Kreis wählt man am besten den Mittelpunkt. Von dort aus kann man durch Variation der Länge des Radius und des Winkels zu einer beliebigen Symmetrieachse ganz anschaulich jeden anderen Punkt innerhalb des Körpers erreichen, ohne ihn verlassen zu müssen.

Abbildung 3: Einfach wegzusammenhängender Seestern

Dieser Seestern ist leider nicht sternförmig, sondern nur einfach wegzusammenhängend, da man wegen den abgeknickten Armen z.B. vom Mittelpunkt aus nicht jede Armspitze erreichen kann und auch keinen anderen verwendbaren Punkt finden kann. (Asymmetrie!!)
Das Gravitationfeld des Erde wird natürlich nur für $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definiert, da sich bei 0 eine Singularität befindet - dort ist das Feld natürlich nicht mehr konservativ.

Aufgabe 11: Vektoranalysis

a)

$$\nabla \cdot F(x,y,z) = \nabla \cdot \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ xyz \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = 2x + xz + \partial_z g(x,y,z) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \qquad \partial_z g(x,y,z) = -2x - xz \Rightarrow \boxed{g(x,y,z) = -2xz - \tfrac{1}{2}xz^2 + c(x,y)}$$

b)

$$\nabla \times F(x,y,z) = \nabla \times \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ xyz \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y g(x,y,z) \\ \partial_x g(x,y,z) - 1 \\ y - y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \qquad \partial_y g(x,y,z) = 0 \Rightarrow g(x,y,z) = g(x,z)$$

$$\Rightarrow \qquad \partial_x g(x,y,z) = 1 \Rightarrow \boxed{g(x,y,z) = x + c(z)}$$

c) Man könnte allgemein zeigen, dass jedes geschlossene Wegintegral Null ist.

d) Sei $g(x,y,z) = x$. Wir verwenden nun wieder wie in Aufgabe 9a) die Formel aus der Vorlesung:
$v_3(0,0,t) = 0$, $v_2(0,t,z) = 0$, $v_1(t,y,z) = \frac{1}{2}y^2 + z$

$$f(x,y,z) = \int_0^z v_3(0,0,t)dt + \int_0^y v_2(0,t,z)dt + \int_0^x v_1(t,y,z)dt = \int_0^x (\frac{1}{2}y^2 + z)dt = \frac{1}{2}y^2 x + xz$$

e) Jetzt ist $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ xyz \\ zy^2 \end{pmatrix}$.

$$\nabla(\nabla F) - \Delta F = \nabla(2x+xz+y^2) - \begin{pmatrix} (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)(x^2+y^2) \\ (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)xyz \\ (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)zy^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+2 \\ 2y \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-2 \\ 2y \\ x+2z \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12: À la Klausur

a) $\nabla \times \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} \begin{pmatrix} x-z+2 \\ 0 \\ x+z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z \frac{x-z+2}{\sqrt{x^2+z^2}} - \partial_x \frac{x+z-1}{\sqrt{x^2+z^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{x^2+xz+2z}{(x^2+z^2)^{3/2}} - \frac{z^2-xz+x}{(x^2+z^2)^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix} =$

$-\frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2+z^2+2z+x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\nabla(\nabla \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} \begin{pmatrix} x-z+2 \\ 0 \\ x+z-1 \end{pmatrix}) - \Delta \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} \begin{pmatrix} x-z+2 \\ 0 \\ x+z-1 \end{pmatrix}$

(Rechnung wie oben, aufwendig aber nicht kompliziert...)

b) Es gilt:

☐ Der Definitionsbereich von v ist sternförmig.

Aufgrund des Nenners ist z.B. der Ursprung nicht in D

☒ v ist nicht überall konservativ

Da die Rotation nicht für alle Raumpunkte gleich 0 ist

☐ Das Kurvenintegral entlang des Einheitskreises verschwindet

v ist nicht radial und rotv $\neq 0$

Aufgabe 13: Aus der theoretischen Physik

a)
- $\nabla \times F(r) = rot\ F(r) = 0 \qquad \forall\, r$
- $\oint\limits_C F(r) \cdot dr = 0 \qquad \forall\, C$
- $\exists\, U$ für das gilt: $F(r) = -\nabla\, U(r)$

b) $F(r) = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

$\partial_y(-\frac{y}{r^2}) = -\frac{1}{r^2}(1 - 2\frac{y^2}{r^2})$

$\partial_x(\frac{x}{r^2}) = \frac{1}{r^2}(1 - 2\frac{x^2}{r^2})$

$\nabla \times f(r) = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r^2}(1 - 2\frac{x^2}{r^2} + 1 - 2\frac{y^2}{r^2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{r^2}(1 - \frac{x^2+y^2}{r^2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

für $r \neq 0$

c) Wegintegral entlang eines Kreises

$\Rightarrow$ Parametrisierung mit ebenen Polarkoordinaten: $r(\varphi) = r_0 \begin{pmatrix} cos\varphi \\ sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\frac{dr}{d\varphi} = r_0 \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r_0\, e_\varphi$$

$$F(r(\varphi)) = \frac{1}{r_0^2} \begin{pmatrix} -r_0\ \sin\varphi \\ r_0\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0}\, e_\varphi$$

$$\oint_C F(r)\cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(\varphi))\, \frac{dr}{d\varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0}\, e_\varphi \cdot e_\varphi\, r_0\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$\Rightarrow$ Ergebnis unabhängig von r_0

d) Das Kraftfeld ist <u>nicht</u> konservativ, weil $\oint_C F(r)\cdot dr \neq 0$. Das ist aber kein Widerspruch zum Ergebnis aus Teilaufgabe b), weil das Kraftfeld nur konservativ ist, wenn $\nabla \times F(r) = rot\ F(r) = 0$ <u>für alle</u> r. Für $r = 0$ muss deshalb $rot\ F(r) \neq 0$ gelten.