Übungsaufgaben zu impliziten Funktionen

für Donnerstag, 17.9.09
von Carla Zensen

Aufgabe 1: Zweite Ableitung einer Auflösung

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = 0$ ein implizite Funktion. Die erste Ableitung der Auflösung einer solchen Funktion nach y ist nach dem Satz aus der VL gegeben durch:

$$g'(x) = -\frac{(\partial_x f)(x, g(x))}{(\partial_y f)(x, g(x))}$$

Berechne nun allgemein die zweite Ableitung $g''(x)$, um die Formel aus der Vorlesung zu beweisen:

$$g''(x) = -\frac{(\partial_y f)^2\, \partial_x^2 f - 2\partial_y f \partial_{xy}^2 f \partial_x f + \partial_y^2 f \cdot (\partial_x f)^2}{(\partial_y f)^3}\Big|_{(x,g(x))}$$

Aufgabe 2: Implizite Funktionen

a)

$$f(x, y, z) = x - y^7 + z^3 - x^2 z - 1 = 0$$

Lässt sich diese Funktion in der Umgebung des Punktes $P = (1, 0, 1)$ als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $z = g(x, y)$ darstellen? Bestimme außerdem $\partial_x g(1, 0)$!

b)

$$f(x, y) = \frac{1}{2} y^2 (x^2 + 1) - 2yx^2 - 2y = 0$$

Bestimme den Bereich $U \subset \mathbb{R}^2$, in dem sich die implizite Funktion f nach y=g(x) auflösen lässt!

c)

$$f(x, y, z) = 1 - z + e^{-2z} \cdot \cos(x - y) = 0$$

- Man zeige, dass sich f in der Umgebung des Punktes (π,0,0) als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion z=g(x,y) darstellen lässt.
- Man berechne grad g(π,0)
- Man bestimme Normalenvektor und Tangentialebene im Punkt P=(π,0,0) der durch die Gleichung f(x,y,z)=0 bestimmten Fläche

d)

$$f(x, y) = 2xy + \cos x^2 + \sin y^2 - 4x - 1 + y$$

- Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0) nach y auflösbar ist
- Berechnen Sie $y'(0)$ und $y''(0)$
- Bestimmen Sie für die Funktion $y(x)$ das Taylor-Polynom vom Grad zwei um den Nullpunkt

Aufgabe 3: Auflösen von Gleichungen

(**Klausuraufgabe, aber nicht ganz einfach**)

$$y^2 + b^2 - 2c^2 = 0$$

$$y^2 + 2b^2 + c^2 = 4$$

a) Zeige, dass sich das Gleichungssystem in einer Umgebung von y=0 nach b(y) und c(y) auflösen lässt.
Hinweis: Der Punkt $(0, \frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ *ist eine Lösung des Gleichungssystems!*

b) Berechne b'(y) als Funktion von b(y) und y und berechne c'(y) als Funktion von c(y) und y! *(Gefragt ist also eigentlich die Jacobi-Matrix* $\begin{pmatrix} \partial_y b(y) \\ \partial_y c(y) \end{pmatrix}$*!)*

Aufgabe 4: Zwei implizite Funktionen

(analog zur Klausuraufgabe von Prof. S. Warzel SS09)
Gegeben ist das Gleichungssystem

$$f_1(t, x, y) = 0 \qquad f_2(t, x, y) = 0$$

mit $f_1(t, x, y) = e^{y^2 \sin x} + x^6 y^2 - 3yt - 1$ und $f_2 = x^2 + y^2 t - 1$.
Der Punkt $P = (1, 0, -1)$ ist eine Lösung des Gleichungssystems. Dieses soll in einer Umgebung von P lokal nach x und y aufgelöst werden. Die Invertierbarkeit welcher Matrix muss dazu überprüft werden? Ist diese Matrix invertierbar?

M=

Aufgabe 5: Untermannigfaltigkeit

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x, y, z) := x^2 + xy - y - z \qquad g(x, y, z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z$$
$$C := \left\{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = g(x) = 0\right\}$$

a) Bestimmen Sie den Bereich von C, in dem das Gleichungssystem $H(x) = (f(x), g(x)) = 0$ nach x, y, z oder (x,y), (x,z) auflösbar ist!

b) Zeigen Sie, dass C eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist!

c) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (t, t^2, t^3)$ eine Parameterdarstellung von C ist!

Aufgabe 6: Existenz der Inversen

Sind folgende Abbildungen bijektiv (auf geeigneten Definitionsmengen, diese bitte auch angeben)? Benutze den **Satz über Umkehrfunktionen** aus der Vorlesung, siehe S.4. und begründe damit deine Antwort durch Rechnung.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(\rho, \phi, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$

c) $\Psi(r, \theta, \varphi) = ((R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta)$

Übungsaufgaben zur Vektoranalysis

Aufgabe 7: Einfache Vektorfelder

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-y, x) \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x, y)$$

a) Veranschauliche die beiden Vektorfelder mittels einer Skizze.

b) Bestimme von f und g jeweils die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation.

c) Die geschlossene Kurve sei gegeben durch die Parametrisierung
$C : [0, 2\pi] \to K : t \mapsto (\cos t, \sin t)$
Berechne nun noch die Zirkulation der beiden Vektorfelder!
Hinweis: Die Zirkulation ist Das Kurvenintegral von f entlang des Weges K!

Aufgabe 8: Kurze Beweise

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig diffbar.
Zeige (möglichst immer mithilfe des Epsilon-Tensors), dass

a) Zeige: rot grad f=0

b) Zeige: div rot v=0

c) Beweise mithilfe des Epsilon-Tensors: $\nabla \times (v_1 + v_2) = \nabla \times v_1 + \nabla \times v_2$

d) Beweise mithilfe des Epsilon-Tensors: $\nabla \times \nabla \times v = \nabla(\nabla \cdot v) - \Delta v$ (schwieriger)

e) Gib ein Beispiel, wo für v nicht gilt: grad div v=0

Aufgabe 9: Potentialbestimmung

a) Bestimme ein Potential zum Vektorfeld

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ \frac{z^2}{2} + xz \\ y(x + z) \end{pmatrix} \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

b) Gegeben ist $V_p(x, y, z) = \begin{pmatrix} pyz + 2x \\ xz - 2y \\ xy \end{pmatrix}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{R}$.

- Man zeige: V_p besitzt nur für p=1 ein Potential.
- Man berechne für p=1 ein zu V_1 gehöriges Potential.
- Für V_p berechne man die Arbeit $\int V_p(x) dx_C$ längs $C : s(t) = (t, t, t^2)$, $0 \le t \le 1$ in Abhängigkeit von p.

Aufgabe 10: Sonne, Mond und Sterne

Erläre, warum eine Kugel und ein Kreis sternförmig sind!
Gib ein Beispiel für eine Menge, die nicht sternförmig, dafür aber einfach wegzusammenhängend ist (Skizze genügt)!
Ist das Gravitationsfeld der Erde für alle Raumpunkte konservativ?

Aufgabe 11: Vektoranalysis

Gegeben ist ein Vektorfeld $F(x,y,z) = (\frac{1}{2}y^2 + z, xy, g(x,y,z))$

a) Wie muss g beschaffen sein, damit div F=0?

b) Wie muss g beschaffen sein, damit rot F=0? Ist das Vektorfeld in diesem Fall konservativ?

c) Nenne eine weitere Methode, mit der sich in diesem Fall feststellen lässt, ob ein konservatives Kraftfeld vorliegt!

d) Finde gegebenfalls ein Potential für F! *Hinweis: Wähle beispielsweise g(x,y,z)=g(x)=x!*

e) Sei nun $g(x,y,z) = g(y,z) = zy^2$. Berechne $\nabla(\nabla F) - \Delta F$!

Aufgabe 12: À la Klausur

(analog zur Klausur von Prof. S.Warzel SS09). Sei $v : D \to \mathbb{R}^3$ein Vektorfeld mit

$$v(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} \begin{pmatrix} x-z+2 \\ 0 \\ x+z-1 \end{pmatrix}$$

a) Berechne

rot v(x)=

$\Delta v =$

b) Es gilt:

☐	Der Definitionsbereich von v ist sternförmig.
☐	v ist nicht überall konservativ
☐	Das Kurvenintegral entlang des Einheitskreises verschwindet

Aufgabe 13: Aus der Theoretischen Physik

aus der Mechanik-Klausur SS08 von Prof. Weise

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

a) Nenne drei äquivalente Bedingungen dafür, dass ein Kraftfeld konservativ ist!

b) Berechne $\nabla \times \vec{F}(\vec{r})$ für $v \neq 0$

c) Berechnen Sie das geschlossene Wegintegral entlang eines Kreises in der x-y-Ebene mit dem Radius $r_0 > 0$ und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung.
Wie hängt das Ergebnis von r_0 ab? *Hinweis: Parametrisieren Sie den Integrationsweg mittels ebener Polarkoordinaten.*

d) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus b) und c): Ist das Kraftfeld konservativ? Gibt es einen Widerspruch zwischen den Ergebnissen aus Teilaufgaben b) und c)?