THOMAS SIEGERT

Lösungsvorschlag zum Übungsblatt:

Approximation von Funktionen und Extremwertprobleme im $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 1)

a) $f(\pi,\pi) = \sin(\pi+\pi) = 0$

$(\partial_x f)(\pi,\pi) = \cos(\pi+\pi) = 1, \left(\partial_y f\right)(\pi,\pi) = \cos(\pi+\pi) = 1$

$(\partial_{xx} f)(\pi,\pi) = -\sin(\pi+\pi) = 0, \left(\partial_{yy} f\right)(\pi,\pi) = -\sin(\pi+\pi) = 0$

$\left(\partial_{xy} f\right)(\pi,\pi) = -\sin(\pi+\pi) = 0$

$\Rightarrow f(x,y) = 0 + 1\cdot(x-\pi) + 1\cdot(y-\pi) + 0 = x + y - 2\pi$

b) $f(0,0) = \sin(0) = 0$

$(\partial_x f)(0,0) = \cos(0) = 1, \left(\partial_y f\right)(0,0) = \cos(0) = 1$

$(\partial_{xx} f)(0,0) = -\sin(0) = 0, \left(\partial_{yy} f\right)(0,0) = -\sin(0) = 0$

$\left(\partial_{xy} f\right)(0,0) = -\sin(0) = 0$

$(\partial_{xxx} f)(0,0) = -\cos(0) = -1$

$\left(\partial_{yyy} f\right)(0,0) = -\cos(0) = -1$

$\left(\partial_{xxy} f\right)(0,0) = -\cos(0) = -1$

$\left(\partial_{yyx} f\right)(0,0) = -\cos(0) = -1$

$\Rightarrow f(x,y) = x + y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}y^2x$

c) $H_f\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} (\partial_{xx} f)\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right) & \left(\partial_{xy} f\right)\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right) \\ \left(\partial_{yx} f\right)\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right) & \left(\partial_{yy} f\right)\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $g(x,y,z) = \sin(x+y+z)$

$(\partial_x g)(0,0,0) = [\cos(x+y+z)]_{(0,0,0)} = 1$

$(\partial_y g)(0,0,0) = [\cos(x+y+z)]_{(0,0,0)} = 1$

$(\partial_z g)(0,0,0) = [\cos(x+y+z)]_{(0,0,0)} = 1$

$\Rightarrow g(x,y,z) = x+y+z$

Einfacher zu sehen durch Substitution: $s \coloneqq x+y+z \to g(s) = \sin(s) \approx s = x+y+z$

e) Bei der Taylorentwicklung dritter Ordnung kommen folgende Polynome 3. Grades vor:

$x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, y^2x, y^2z, z^2x, z^2y, xyz,$ weshalb es 10 verschiedene Terme gibt.

f) $H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}g & \partial_{xy}g & \partial_{xz}g \\ \partial_{yx}g & \partial_{yy}g & \partial_{yz}g \\ \partial_{zx}g & \partial_{zy}g & \partial_{zz}g \end{pmatrix},$

aus Symmetriegründen sind alle Glieder gleich:

$(\partial_{xx}g)(0,0,2\pi) = [-\sin(x+y+z)]_{(0,0,2\pi)} = 0$

$\Rightarrow H_g(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2)

a) Wir entwickeln einfach den Nenner bis zur zweiten Ordnung und multiplizieren ihn an den Zähler, da dieser schon Polynom 2. Grades ist.

$[(x+y+3)^{-1}]_{(0,0)} = \frac{1}{3}$

$\left(\partial_x (x+y+3)^{-1}\right)(0,0) = \left(\partial_y (x+y+3)^{-1}\right)(0,0) = [-(x+y+3)^{-2}]_{(0,0)} = -\frac{1}{9}$

$\left(\partial_{xx}(-(x+y+3)^{-2})\right)(0,0) = \left(\partial_{yy}(-(x+y+3)^{-2})\right)(0,0) =$
$= \left(\partial_{xy}(-(x+y+3)^{-2})\right)(0,0) = [2(x+y+3)^{-3}]_{(0,0)} = \frac{2}{27}$

$\Rightarrow f(x,y) = (1+x^2-y^2)\left(1 - \frac{1}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{27}x^2 + \frac{2}{27}xy + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{27}y^2 + T.h.O.\right) =$
$= \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x+y) + \frac{10}{27}x^2 + \frac{2}{27}xy - \frac{8}{27}y^2$

b) $\cosh(y) = 1 + \frac{1}{2}y^2$

$$e^{-y} = 1 - y + \frac{1}{2}y^2$$

$$\sin(x)^{-1} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 =$$
$$= 2 - 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 14\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$\Rightarrow g(x,y) = \left(1 + \frac{1}{2}y^2\right)\left(1 - y + \frac{1}{2}y^2\right)\left(2 - 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 14\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2\right) =$$
$$= (1 - y + y^2)\left(2 - 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 14\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2\right)$$

c) $h(h,h) = \frac{1}{2h}$

$$(\partial_i h)(h,h) = \left[-\frac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_2^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x_i\right]_{(h,h)} = -\frac{1}{4h^2}$$

$$(\partial_{11} h)(h,h) = \left[\frac{4(2x_1^2 - x_2^2)}{(2x_1^2 + 2x_2^2)^{\frac{5}{2}}}\right]_{(h,h)} = \frac{1}{8h^3}$$

$$(\partial_{22} h)(h,h) = \left[-\frac{4(-2x_2^2 + x_1^2)}{(2x_1^2 + 2x_2^2)^{\frac{5}{2}}}\right]_{(h,h)} = \frac{1}{8h^3}$$

$$(\partial_{12} h)(h,h) = \left[\frac{12x_1x_2}{(2x_1^2 + 2x_2^2)^{\frac{5}{2}}}\right]_{(h,h)} = \frac{3}{8h^3}$$

$$\Rightarrow h(x_1, x_2) =$$
$$= \frac{1}{2h} - \frac{1}{4h^2}\big((x-h) + (y-h)\big) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8h^3}\left((x-h)^2 + (y-h)^2\right) + \frac{3}{8h^3}(x-h)(y-h)$$

d) $\lim_{h\to\infty} h(x_1, x_2) = 0$, da jeweils Summanden von der Form $\frac{c}{h^\alpha}$ vorkommen. Diese gehen für $\alpha > 0$ gegen 0.

Aufgabe 3)

$$\psi(x,y) = \psi(0) + grad\ g(0) \circ \binom{x}{y} + \frac{1}{2}\binom{x}{y} \circ H_g(0)\binom{x}{y} + R_3(x,y) =$$

$$= \pi + \binom{0}{0} \circ \binom{x}{y} + \frac{1}{2}\binom{x}{y} \circ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\binom{x}{y} + R_3(x,y) = \pi + 2x^2 + y^2 + R_3(x,y)$$

Aufgabe 4)

$$grad\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 2x \\ y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y_{1/2} = \pm 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \text{kritische Punkte: } (0,1) \text{ und } (0,-1)$$

a) x_3 und x_4 sind also kritische Punkte.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det\left(H_f(x,y)\right) = (12x^2 + 2)(2y) := H(x,y)$$

b) Es gibt keine lokalen Maxima.

c)

$$H(x_3) = 4 > 0 \ \wedge f_{xx}(x_3) > 0 \Leftrightarrow lokales\ Minimum.$$

d)

$$H(x_4) = -4 \Leftrightarrow Sattelpunkt$$

e) $f\left(p(t)\right) = t^4 + \frac{1}{3}t^6 + t^2 - t^2 + 1 = \frac{1}{3}t^6 + t^4 + 1 := \Psi(t)$

$\frac{d}{dt}\Psi(t) = 4t^3 + 2t^5 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$ keine weiteren Lsgn.

$\frac{d^2}{dt^2}(0) = 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt bei $t_1 = 0$

$f\left(k(t)\right) = \cos^4(t) + \frac{1}{3}\sin^3(t) + \cos^2(t) - \sin(t) + 1 := \xi(\text{t})$

$\frac{d}{dt}\xi(t) = -4\cos^3(t)\sin(t) + \sin^2(t)\cos(\text{t}) - 2\cos(\text{t})\sin(t) - \cos(t) = 0$

$\cos(t) \cdot (-4\cos^2(t)\sin(t) + \sin^2(t) - 2\sin(t) - 1) = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{2} \vee t_2 = \frac{3}{2}\pi$

Anstatt die viel zu lange zweite Ableitung zu bilden und die Werte einzusetzen, machen wir eine Monotonietabelle:

t	$0 \leq t < \frac{\pi}{2}$	$t = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < t < \frac{3}{2}\pi$	$t = \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < t \leq 2\pi$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
G_f	\	____	/	-----	\

Aus der Tabelle können wir ablesen, dass bei t_1 ein Tiefpunkt und bei t_2 ein Hochpunkt liegt.

Aufgabe 5)

a) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x^2 - 3y \\ 6y^2 - 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} mit\ (*): \frac{3}{4} \cdot 4y^4 - 3y \\ x = 2y^2\ (*) \end{matrix} \Leftrightarrow 3y(y^3 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } \mathrm{y}_2 = 1 \Rightarrow \mathrm{x}_2 = 2$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$$

$$\det\left(H_f(0{,}0)\right) = -9 < 0 \Rightarrow Sattelpunkt\ bei\ (0{,}0)$$

$$\det\left(H_f(2{,}1)\right) = 45 > 0 \wedge f_{xx}(2{,}1) = 3 > 0 \Rightarrow Minimum\ bei\ (2{,}1)$$

b) $\nabla k(a,b) = \begin{pmatrix} a(3a+2) \\ b(3b+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_1 = 0 \vee a_2 = -\frac{2}{3} \\ b_1 = 0 \vee b_2 = -\frac{2}{3} \end{matrix} \Rightarrow Vier\ krit. Pkte.$

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)$$

$$H_k(a,b) = \begin{pmatrix} 6a+2 & 0 \\ 0 & 6b+2 \end{pmatrix}$$

$$\det(H_k(0{,}0\,)) = 4 > 0 \wedge k_{xx}(0{,}0) = 2 > 0 \Rightarrow Minimum\ bei\ (0{,}0)$$

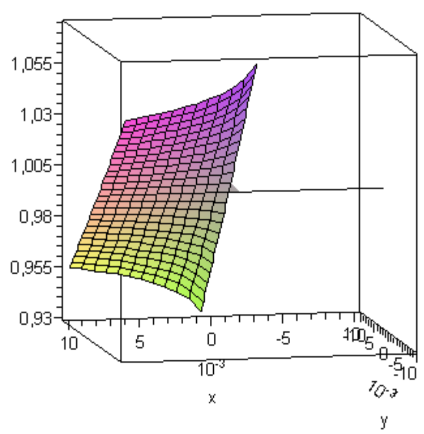
$$\det\left(H_k\left(0, -\frac{2}{3}\right)\right) = -4 < 0 \Rightarrow Sattelpunkt\ bei\ \left(0, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\det\left(H_k\left(-\frac{2}{3}, 0\right)\right) = -4 < 0 \Rightarrow Sattelpunkt\ bei\ \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$$

$$\det\left(H_k\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right) = 4 > 0 \wedge k_{xx}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -2 < 0 \Rightarrow Maximum\ bei\ \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

c) $\nabla z(x,y) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} \\ x^y \ln(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y = 0 \\ x = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow kritischer\ Punkt\ bei\ (1{,}0)$

Der x-Wert $x = 0$ würde zwar auch gegen 0 gehen, allerdings nur im Grenzwert. Schaut man sich die Funktion x^x an, so sieht man, dass bei $x = 0$ zwar ein Maximum liegt, allerdings keine waagerechte Tangente.



Man erkennt, dass die Funktion nur für positive x-Werte definiert ist. Bei $y = 0$ steht allerdings für alle x-Werte so etwas wie eine Gerade in den Raum. Dies sind Unstetigkeitsstellen, weswegen dort auch keine totale Ableitung existiert.
Aus diesen Gründen existiert nur der Wert (1,0).

$$H_z(x,y) = \begin{pmatrix} y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1}\big(1+yln(x)\big) \\ x^{y-1}\big(1+yln(x)\big) & (\ln(x))^2 x^y \end{pmatrix}$$

$$H_z(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det\big(H_z(1,0)\big) = -1 < 0 \Leftrightarrow Sattelpunkt\ bei\ (1,0)$$

Aufgabe 6)

a) Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung um $(1, y_0)$:

$$\tilde{f}(x,y) = y_0^3 + \left[\begin{pmatrix} 3x^2y^3 \\ 3y^2x^3 \end{pmatrix}\right]_{(1,y_0)} \circ \begin{pmatrix} x-1 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = y_0^3 + \begin{pmatrix} 3y_0^3 \\ 3y_0^2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x-1 \\ y-y_0 \end{pmatrix} =$$
$$= 3y_0^3 x + 3y_0^2 y - 5y_0^3$$

b) Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung um (1,1):

$$\hat{f}(x,y) = 1 + \left[\begin{pmatrix} 3x^2y^3 \\ 3y^2x^3 \end{pmatrix}\right]_{(1,1)} \circ \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 6xy^3 & 9y^2x^2 \\ 9x^2y^2 & 6yx^3 \end{pmatrix}\right]_{(1,1)} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} =$$
$$= \cdots = 10 - \frac{9}{2}(x+y) + 3(x^2 + y^2 + 3xy)$$

c) Auf dem Bereich $[-2,2] \times [-1,1]$ werden zuerst die Randpunkte untersucht:

$$f(-2,-1) = 8$$
$$f(-2,1) = -8$$
$$f(2,-1) = -8$$
$$f(2,1) = 8$$

Als Referenz für die weiteren Punkte…

Als nächstes lässt man einen Wert fest und einen variabel, sodass verschiedene Funktionen entstehen, die man separat untersuchen muss:

$$f(-2,y) = -8y^3 \rightarrow f'(-2,y) = -24y^2 \rightarrow Sattel\ bei\ 0$$
$$f(2,y) = 8y^3 \rightarrow f'(2,y) = 24y^2 \rightarrow Sattel\ bei\ 0$$
$$f(x,-1) = -x^3 \rightarrow f'(x,-1) = -3x^2 \rightarrow Sattel\ bei\ 0$$
$$f(x,1) = x^3 \rightarrow f'(x,1) = 3x^2 \rightarrow Sattel\ bei\ 0$$

Es gibt also keine weiteren Extrema.
Das heißt zusammengefasst, dass es lokale Maxima bei $(-2,-1) \wedge (2,1)$ und des Weiteren lokale Minima bei $(-2,1) \wedge (2,-1)$ gibt.

Aufgabe 7)

a) Die Fläche eines Rechtecks das über die Achsen geht ist $A(x,y) = 2x \cdot 2y = 4xy$. Unsere Nebenbedingung ist die Begrenzung durch die Ellipse: $e(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

<u>Die Hilfsfunktion $F(x,y,\lambda)$ lautet also:</u>

$$F(x,y,\lambda) = 4xy + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

Nun geht man vor, als hätte man diese Funktion gegeben und sucht Extrema mit Hilfe des Gradienten.

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 4y + \frac{2\lambda x}{a^2} \\ 4x + \frac{2\lambda y}{b^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein solches nichtlineares Gleichungssystem ist im Allgemeinen nicht einfach zu lösen. Bei Systemen in dieser Form eliminiert man am besten zuerst das λ um dann mit der verbleibenden dritten Gleichung x oder y zu eliminieren.

$I.: \lambda = -\frac{4ya^2}{2x} = -\frac{2ya^2}{x}$

$in\ II.:\ 4x - \frac{4y^2a^2}{xb^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2\left(\frac{a^2}{b^2}\right)$

$in\ III.: y^2\left(\frac{a^2}{b^2}\right) \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}b$

$in\ II.:\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$

Die negativen Werte sind natürlich Unsinn, weswegen die Kanten jeweils $\frac{\sqrt{2}}{2}b$ und $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ sind.

Der Maximale Flächeninhalt ist also $A_{max} = 4\frac{\sqrt{2}}{2}a\frac{\sqrt{2}}{2}b = 2ab$.

b) Entweder man setzt für den Flächeninhalt eines Kreises $A_k(x,y) = r^2\pi = (x^2 + y^2)\pi$ an und löst die entsprechenden Gleichungen, oder:
Man überlegt sich, dass ein Kreis tangential innerhalb der Ellipse an die kleine Halbachse angelegt werden kann. Dieser Kreis ist somit der größtmögliche.
Der Radius dieses Kreises ist $\min(a,b)$ und somit der maximale Flächeninhalt
$A_{kmax} = \min(a,b)^2\,\pi$.

Aufgabe 8)

a) Wie in der Angabe zu lesen, lässt sich das Problem auf ein zweidimensionales zurückführen.
Das Volumen eines Zylinders innerhalb eines Kegels ist: $V_z(r,z) = r^2\pi z$
Entsprechend Aufgabe 7) ist die Nebenbedingung, dass alles innerhalb des Kegels sein soll, also $k(r,z) = \frac{R}{r} - \frac{H}{H-z} = 0$. Damit man schöner Rechnen kann, schreibt man $k(r,z)$ als $\frac{r}{R} - 1 + \frac{z}{H} = 0$

<u>Die Hilfsfunktion lautet also:</u>

$F(r,z,\lambda) = r^2\pi z + \lambda\left(\frac{r}{R} - 1 + \frac{z}{H}\right)$

$$\nabla F(r,z,\lambda) = \begin{pmatrix} 2r\pi z + \frac{\lambda}{R} \\ r^2\pi + \frac{\lambda}{H} \\ \frac{r}{R} - 1 + \frac{z}{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$I.: \lambda = -2rR\pi z$

$in\ II.: r^2\pi - \frac{2rR\pi z}{H}\ (II')$

$aus\ III.: z = \left(1 - \frac{r}{R}\right) H\ (III')$

$in\ II'.: r^2\pi - \frac{2rR\pi\left(1 - \frac{r}{R}\right)H}{H} = r^2\pi - 2rR\pi + 2r^2\pi = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0 \ldots$

$\Rightarrow r_2 = \frac{2}{3}R$

$in\ III'.: z = \left(1 - \frac{2}{3}\right) H = \frac{1}{3} H\ oder\ z = H \ldots$

Die Randpunkte sind natürlich Unsinn, da bei diesen kein Flächeninhalt herauskommt.

Somit ist das maximale Volumen: $V_{zmax} = \frac{\left(\frac{2}{3}R\right)^2 \pi H}{3} = \frac{4\pi}{27} R^2 H$

b) Das Volumen eines Quaders ist entsprechend Aufgabe 7)

$$V_Q(x,y,z) = 2x2yz = 4xyz$$

Die Kegelgleichung schreibt sich mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ um in $z = \left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right) H$.

Aus Symmetriegründen (Hinweis) ist $x = y \coloneqq s$. Das maximale Rechteck in einem Kreis ist ein Quadrat.
Dadurch kürzt sich das Problem wieder auf ein zweidimensionales.

$V_Q(s,z) = 4s^2 z\ und\ k(s,z) = \frac{\sqrt{2}s}{R} - 1 + \frac{z}{H} = 0$

<u>Hilfsfunktion:</u> $F(s,z,\lambda) = 4s^2 z + \lambda\left(\frac{\sqrt{2}s}{R} - 1 + \frac{z}{H}\right)$

$$\nabla F(s,z,\lambda) = \begin{pmatrix} 8sz + \frac{\sqrt{2}\lambda}{R} \\ 4s^2 + \frac{\lambda}{H} \\ \frac{\sqrt{2}s}{R} - 1 + \frac{z}{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$I.: \lambda = -\frac{8szR}{\sqrt{2}} = -4\sqrt{2}szR$

$in\ II.: 4s^2 - \frac{4\sqrt{2}szR}{H}$

$$mit\ III. und\ II.: 4s^2 - \frac{4\sqrt{2}sR\left(1-\frac{\sqrt{2}s}{R}\right)H}{H} = 4s^2 - 4\sqrt{2}Rs + 8s^2 = 0 \Leftrightarrow s_1 = 0 \ldots$$

$$\Rightarrow s_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}R$$

$$in\ III.: z = \frac{1}{3}H\ oder\ z = H$$

Natürlich sind auch hier die Randpunkte sinnfrei.

Das maximale Volumen des gesuchten Quaders ist also $V_{Qmax} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{3}R\right)^2 H = \frac{8}{27}R^2H$

Aufgabe 9)

a) Die Abstandsfunktion zum Ursprung ist $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Unsere Nebenbedingung ist ein Ort auf der Ebene $E(x,y,z) = x+y+z-10 = 0$.
Da nur nach einem Punkt gesucht wird, reicht es das Quadrat der Abstandsfunktion zu verwenden. $\Rightarrow \delta(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$
<u>Hilfsfunktion:</u> $F(x,y,z,\mu) = x^2+y^2+z^2+\mu(x+y+z-10)$

$$\nabla F(x,y,z,\mu) = \begin{pmatrix} 2x+\mu \\ 2y+\mu \\ 2z+\mu \\ x+y+z-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -\frac{\mu}{2} \\ y = -\frac{\mu}{2} \\ z = -\frac{\mu}{2} \\ \Rightarrow 3\left(-\frac{\mu}{2}\right) - 10 = 0 \end{matrix}$$

$$aus\ IV.: \mu = -\frac{20}{3} \Rightarrow x = y = z = -\frac{\mu}{2} = -\left(\frac{\left(-\frac{20}{3}\right)}{2}\right) = \frac{10}{3}$$

b) Die Abstandsfunktion zum Punkt (1,1,1) lautet:
$\gamma(x,y,z) = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$. Die Nebenbedingung ist wieder ein Ort auf der gegebenen Ebene $F(x,y,z) = x+2y+4z-8 = 0$
Auch hier reicht es wieder das Quadrat der Abstandsfunktion zu benutzen.
<u>Hilfsfunktion:</u> $G(x,y,z,\mu) = (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\mu(x+2y+4z-8)$

$$\nabla G(x,y,z,\mu) = \begin{pmatrix} 2(x-1)+\mu \\ 2(y-1)+2\mu \\ 2(y-1)+4\mu \\ x+2y+4z-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -\frac{\mu}{2}+1 \\ y = -\mu+1 \\ z = -2\mu+1 \\ \Rightarrow \frac{-\mu}{2}+1-2\mu+2-8\mu+4-8 = 0 \end{matrix}$$

$$aus\ IV.: \mu = -\frac{2}{21} \Rightarrow x = \frac{22}{21}, y = \frac{23}{21}, z = \frac{25}{21}$$

c) Dieser Kreis ist achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden der x- und y-Achse. Somit liegt sowohl (0,0), als auch (8,8) und zudem der Kreismittelpunkt (2,2) auf dieser Geraden.

Das ganze Problem reduziert sich deshalb auf eine einzige quadratische Gleichung, da man die Lagrange-Multiplikator-abhängige Gleichung gar nicht braucht.
Die Hilfsfunktion würde lauten:

$$F(x,y,\lambda) = \sqrt{(x-8)^2 + (y-8)^2} + \lambda((x-2)^2 + (y-2)^2 - 4)$$

Bei der Berechnung des Gradienten genügt uns jetzt allein die letzte Gleichung, welche ja die Kreisgleichung ist. Aus Symmetriegründen gilt auch hier wieder $x = y$:

$$\Rightarrow 2(x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = y_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Aufgabe 10)

a) $\frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} = x^{\alpha} \ln(x) \to 0\ f\ddot{u}r\ x \to 0\ q.e.d.$

b) $\frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} \to 0\ f\ddot{u}r\ x \to \infty\ q.e.d$

c) $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\cos(x)}{1} \to 1 < \infty\ f\ddot{u}r\ x \to 0\ (nach\ L'Hospital)\ q.e.d.$

d) $\frac{\sin(x^2)}{x} = \frac{\cos(x^2)2x}{1} \to 0 < \infty\ f\ddot{u}r\ x \to 0 \Rightarrow 1. stimmt$

$$\frac{\sin(x^2)}{1} \to 0\ f\ddot{u}r\ x \to 0 \Rightarrow 2. stimmt$$

$$\frac{\sin(x^2)}{1} \to 0 < \infty\ f\ddot{u}r\ x \to 0 \Rightarrow 3. stimmt$$

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{\cos(x^2)\,2x}{2x} \to 1 \neq 0\ f\ddot{u}r\ x \to 0 \Rightarrow 4. stimmt\ nicht$$

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{\cos(x^2)\,2x}{2x} \to 1 < \infty\ f\ddot{u}r\ x \to 0 \Rightarrow 5. stimmt$$

$$\frac{\sin(x^2)}{x^3} = \frac{\cos(x^2)\,2x}{3x^2} \to \infty\ f\ddot{u}r\ x \to 0 \Rightarrow 6. stimmt\ nicht$$