THOMAS SIEGERT

Übungsblatt Ferienkurs Analysis II

16.09.2009

Approximation von Funktionen und Extremwertprobleme im $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 1)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \sin(x + y)$.

a) Entwickeln Sie die Funktion f bis zur zweiten Ordnung im Punkt (π, π).

b) Entwickeln Sie die Funktion f bis zur dritten Ordnung um die Null.

c) Wie lautet die Hesse-Matrix von f am Punkt $\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$?

Sei nun $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, g(x, y, z) = f(x, y + z)$.

d) Entwickeln Sie die Funktion g bis zur ersten Ordnung um die Null.

e) Wie viele verschiedene Polynome dritter Ordnung hat die Taylorentwicklung von g bis zur dritten Ordnung um (0,0,0)?

☐ 0 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 10 ☐ 12 ☐ 14

f) Wie lautet die Hesse-Matrix von g am Punkt $(0,0,2\pi)$?

Aufgabe 2)

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der folgenden Funktionen bis zu zweiten Ordnung.

a) $f(x, y) = \frac{1+x^2-y^2}{x+y+3}$ im Entwicklungspunkt (0,0).

b) $g(x, y) = \frac{\cosh(y)}{\sin(x)\cdot e^y}$ im Entwicklungspunkt $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$.
Anmerkung: Es genügt hier vor dem Ausmultiplizieren eine Form, wie etwa $(a_0 + a_1 y + a_2 y^2) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$ anzugeben. Entwickeln Sie die einzelnen Faktoren und multiplizieren Sie sie aneinander.

c) $h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2x^2+2y^2}}$ im Entwicklungspunkt (h,h).
$\underline{(\text{Die Entwicklung des Coulomb} - \text{Potentials ist zeitaufwendig.})}$

d) Berechnen Sie den Grenzwert $h \to \infty$ für die Taylorentwicklung aus Aufgabe c).

Aufgabe 3)

Gegeben sei eine dreimal stetig differenzierbare Funktion ψ, die am Ursprung einen kritischen Punkt besitzt. Außerdem sind folgende Werte angegeben.

$$\psi(0) = \pi, \quad (\partial_2^2\psi)(0) = 2, \quad (\partial_1^2\psi)(0) = 4, \quad (\partial_1\partial_2\psi)(0) = 0$$

Wie lautet die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung von ψ im Entwicklungspunkt $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4)

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = x^4 + \frac{1}{3}y^3 + x^2 - y + 1$, sowie die Punkte im $\mathbb{R}^2$:

$$x_1 = (0,0),\ x_2 = (-1,0),\ x_3 = (0,1),\ x_4 = (0,-1),\ x_5 = (1,0),\ x_6 = (1,1)$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) f besitzt einen kritischen Punkt in

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5 ☐ x_6

b) f besitzt ein lokales Maximum in

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5 ☐ x_6

c) f besitzt ein lokales Minimum in

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5 ☐ x_6

d) f besitzt einen Sattelpunkt in

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5 ☐ x_6

Gegeben sind nun die beiden Kurven: $\boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{k}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

e) Bestimmen und klassifizieren Sie die kritischen Stellen von f entlang der beiden Kurven.

Aufgabe 5)

Bestimmen und charakterisieren Sie die kritischen Punkte der folgenden Funktionen.

a) $f(x,y) = \frac{x^3}{4} - 3xy + 2y^3$

b) $k(a,b) = a^3 + b^3 + a^2 + b^2$

c) $z(x,y) = x^y$

Aufgabe 6)

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y) = x^3y^3$

a) Eine Funktion, deren Graph Tangentialebene am Punkt $(1, y_0)$ ist.

b) Eine quadratische Funktion, die mit f bis zu den zweiten Ableitungen bei $(1,1)$ übereinstimmt.

c) Lokale Minima und Maxima für $(x,y) = [-2,2] \times [-1,1]$.

Aufgabe 7)

Gegeben ist die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \ (a, b > 0)$.

a) Gesucht ist ein achsenparalleles Rechteck innerhalb dieser Ellipse mit größtmöglichem Flächeninhalt. Geben Sie die Kantenlängen, sowie den Flächeninhalt an. Benutzen Sie die Methode der Lagrange'schen Multiplikation.

b) Nun ist ein Kreis innerhalb der Ellipse gesucht mit dem größtmöglichen Flächeninhalt. Geben Sie den Radius, sowie den Flächeninhalt an.

Aufgabe 8)

Ein Kreis-Kegel mit Radius R und Höhe H, mit der Spitze nach oben auf der x-y-Ebene stehend, kann durch $\frac{R}{r} = \frac{H}{H-z}$ parametrisiert werden.

a) Berechnen Sie das größtmögliche Volumen eines Zylinders, welcher aus dem Kegel ausgeschnitten wird.

b) Nun soll ein Quader aus diesem Kegel herausgeschnitten werden. Berechnen Sie das maximale Volumen eines solchen Quaders.
(Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie dieses Problems.)

Aufgabe 9)

a) Suchen Sie den Punkt auf der Ebene $E: x + y + z = 10$, welcher am nächsten am Ursprung liegt.

b) Suchen Sie den Punkt auf der Ebene $F: x + 2y + 4z = 8$, welcher am nächsten am Punkt (1,1,1) liegt.

c) Suchen Sie die Punkte auf dem Kreisrand $K: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$, welche am nächsten und am weitesten entfernt vom Punkt (8,8) sind.

Aufgabe 10)

Die Landau-Symbole dienen zum Beispiel dazu das Restglied aus der Taylorentwicklung abzuschätzen. Sie sind folgendermaßen definiert:

f ist „groß-Oh" von g bei a, d.h. $f(x) = O\big(g(x)\big)\ f\ddot{u}r\ x \to a$, genau dann, wenn gilt:

$$\limsup_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

f ist „klein-Oh" von g bei a, d.h. $f(x) = o\big(g(x)\big)\ f\ddot{u}r\ x \to a$, genau dann, wenn gilt:

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

a) Zeigen Sie, dass $\ln(x) = o(x^{-\alpha})\ f\ddot{u}r\ x \to 0$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\ln(x) = o(x^{\alpha})\ f\ddot{u}r\ x \to \infty$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $\sin(x) = O(x)\ f\ddot{u}r\ x \to 0$ gilt.

d) Welche Aussagen sind richtig bei $x \to 0$? $\sin(x^2) =$

☐ $= O(x)$ ☐ $= o(1)$ ☐ $= O(1)$ ☐ $= o(x^2)$ ☐ $= O(x^2)$ ☐ $= o(x^3)$