THOMAS SIEGERT

Lösungsvorschlag zum Übungsblatt:

Differentialgleichungen

Aufgabe 1)

a) Die höchste Ableitung der DGL ist die vierte, also hat die DGL Dimension 4.

b) Entweder Einsetzen, was ziemlich lange dauern würde, oder:
Exponentialansatz: $y(x) = Ae^{\lambda x}$

$$y'(x) = \lambda Ae^{\lambda x}, y''(x) = \lambda^2 Ae^{\lambda x}, y'''(x) = \lambda^3 Ae^{\lambda x}, y^{(4)}(x) = \lambda^4 Ae^{\lambda x}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda + 2 = 0$$

Wie man leicht errät, ist die erste Nullstelle $\lambda_1 = 1$. Also ist e^x Lösung der DGL.
Durch Polynomdivision erhält man die kubische Gleichung: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$
Auch hier errät man $\lambda_2 = 1$ als Nullstelle. Demnach ist xe^x Lösung der DGL.
Eine weitere Polynomdivision bringt uns auf: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
Mit der Mitternachtsformel erhält man $\lambda_{3/4} = 1 \pm i$.

Also sind $e^x \cos(x)$, $e^x \sin(x)$ und $e^x(\sin(x) - \cos(x))$, *als Kombination der beiden Lösungen*, ebenfalls Lösungen der DGL.

Die Nullfunktion löst diese Funktion auch.

c) Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL ist $y_p = 1$.

$$\mathcal{L} = \{a_1 e^x + a_2 x e^x + a_3 e^x \cos(x) + a_4 e^x \sin(x) + 1 | a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 2)

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix}, x(0) = 5 \text{ und } \dot{x}(0) = 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, da\ diese\ Matrix\ weder\ nilpotent,$$
$$noch\ obere\ Dreiecksmatrix\ ist, muss\ sie\ diagonalisiert\ werden:$$

$$\det(\tilde{\boldsymbol{A}} - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0\ (\triangleq Polynom\ vom\ Exponentialansatz)$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \text{ und } \lambda_2 = -2$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} - \lambda_1 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \sim> -3\tilde{x}_1 = -\tilde{x}_2 \Leftrightarrow freie\ Variable: \tilde{x}_1 := \mu \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mu$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} - \lambda_2 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \sim > 2\tilde{x}_1 = -\tilde{x}_2 \Leftrightarrow freie\,Variable\; \tilde{x}_1 := \gamma \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \gamma$$

$$\boldsymbol{S} = (\tilde{\boldsymbol{v}}_1 \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^2/_5 & {}^1/_5 \\ {}^3/_5 & -{}^1/_5 \end{pmatrix}$$

$$e^{t\tilde{A}} = \boldsymbol{S}^{-1} diag\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\right) \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{3t} + \frac{3}{5}e^{-2t} & \frac{2}{5}e^{3t} - \frac{2}{5}e^{-2t} \\ \frac{3}{5}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} & \frac{3}{5}e^{3t} + \frac{2}{5}e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = e^{t\tilde{A}} \boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{3t} + \frac{3}{5}e^{-2t} & \frac{2}{5}e^{3t} - \frac{2}{5}e^{-2t} \\ \frac{3}{5}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} & \frac{3}{5}e^{3t} + \frac{2}{5}e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{3t} + e^{-2t} \\ 6e^{3t} - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Achtung! $6e^{3t} - e^{-2t}$ ***ist nicht die Ableitung von*** $4e^{3t} + e^{-2t}$ **, sondern nur die Hälfte! Dies kommt durch die Anfangsbedingungen zu Stande.**

Aufgabe 3)

a) Exponentialansatz: $x(t) = Ae^{\lambda t}, \dot{x}(t) = \lambda A e^{\lambda t}, \ddot{x}(t) = \lambda^2 A e^{\lambda t}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1/2} = 2 \pm 2i$$

$$\Rightarrow Fundamentalsystem\colon e^{2t}\cos(2t)\,, e^{2t}\sin(2t)$$

b) Partikuläre Lösung: $x_p = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x(t) = Ae^{2t}\sin(2t) + Be^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{4}$

$$x(0) = \frac{1}{2} = B + \frac{1}{4} \Leftrightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$\dot{x}(t) = 2e^{2t}\sin(2\mathrm{t})\,(\mathrm{A} - \mathrm{B}) + 2\mathrm{e}^{2t}\cos(2t)\,(A + B)$$

$$\dot{x}(0) = \frac{1}{2} = 2(A + B) \Leftrightarrow A + B = \frac{1}{4} \Leftrightarrow A = 0$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{4}e^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(1 + e^{2t}\cos(2t)\right)$$

Aufgabe 4)

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) A ist obere Dreiecksmatrix und kann in eine Diagonal- und nilpotente Matrix aufgeteilt werden, welche kommutieren:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{t\boldsymbol{A}} = e^{t(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{N})} = e^{t\boldsymbol{D}} e^{t\boldsymbol{N}} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 3t \\ 0 & 0 & -2t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 + 3t \\ 0 & 1 & -2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & e^t(t^2 + 3t) \\ 0 & e^t & -2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = e^{t\boldsymbol{A}} \boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & e^t(t^2 + 3t) \\ 0 & e^t & -2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} (t+1)^2 + 2t \\ 1 - 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5)

a) $x(t)x'(t) = 12t^2 \Leftrightarrow x \cdot \frac{dx}{dt} = 12t^2 \Leftrightarrow x \cdot dx = 12t^2 \cdot dt$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{x(t)} x\, dx = \int_{t_0}^{t} 12t^2 dt \Leftrightarrow \frac{1}{2} x(t)^2 - \frac{1}{2} x_0^2 = 4(t^3 - t_0^3)$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \pm \sqrt{8(t^3 - t_0^3) + x_0^2}\ \forall t \geq \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{8} x_0^2 + t_0^3\right)}$$

b) $\left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right)^2 = 4\left(\frac{x}{y(x)}\right)^2 - 4x^2 \Leftrightarrow y'^2 = 4x^2 - 4(xy)^2 = 4x^2(1-y^2)$

$$\Leftrightarrow \frac{y'^2}{1-y^2} = 4x^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 2x \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int_{x_0}^{x} 2x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \arcsin\big(y(x)\big) - \arcsin(y_0) = x^2 - x_0^2$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \sin(x^2 - x_0^2 + \arcsin(y_0))$$

c) $x^{-x} = \frac{\ln(x)}{y'(x)} + \frac{1}{y'(x)} \Leftrightarrow y' = x^x(\ln(x)+1),$
$Wir\ suchen\ also\ nur\ eine\ Stammfkt.$

$$\Leftrightarrow \int_{y_0}^{y(x)} dy = \int_{x_0}^{x} x^x(\ln(x)+1)\ dx = \int_{x_0}^{x} e^{x\cdot\ln(x)}(\ln(x)+1)\,dx$$

<u>Substitution:</u> $u(x) = x\cdot\ln(x) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \ln(x)+1 \Leftrightarrow du = (\ln(x)+1)dx$
$u(x_0) = x_0\cdot\ln(x_0)$

$$\Leftrightarrow y(x) - y_0 = \int_{x_0\cdot\ln(x_0)}^{x\cdot\ln(x)} e^u\,du = x^x - x_0^{x_0}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = x^x - x_0^{x_0} + y_0$$

Lösungen zur Differentialrechnung

von Carla Zensen

Aufgabe 1: Definitionen

a) Für $x \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} \in \mathbb{R}$$

Andererseits ist die Funktion $\frac{\partial}{\partial x_1} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ punktweise definiert durch die Funktionsvorschrift

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1.x_2, x_3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} \in \mathbb{R}$$

Im ersten Fall handelt es sich bei dem definierten Objekt um einen Funktionswert, der eine reelle Zahl ist, im zweiten Fall um eine Abbildungsvorschrift. Nicht verwechseln!

b)
- $\partial_x f(x, y, z) = \frac{y}{z} \cdot x^{y-1}$
- $\partial_y f(x, y, z) = \frac{x^y}{z} \cdot \ln x$, da $\boxed{x^y = e^{y \ln x}}$
- $\partial_z f(x, y, z) = -\frac{x^z}{z^2}$
- $\partial_y \partial_x f(x, y, z) = \partial_y \left(\frac{y}{z} \cdot x^{y-1} \right) = \frac{x^{y-1}}{z} \cdot (1 + y \ln x)$
- $\partial_x \partial_y f(x, y, z) = \partial_x \left(\frac{x^y}{z} \cdot \ln x \right) = \frac{x^{y-1}}{z} \cdot (1 + y \ln x)$
- $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_x f(a) \\ \partial_y f(a) \\ \partial_z f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} 1^{2-1} \\ \ln 1 \cdot 1^2 \\ -\frac{1^2}{3^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Funktion ist natürlich nicht stetig auf $\mathbb{R}^3$, da schon $f(\cdot, \cdot, z)$ in der Null nicht stetig ist. Deshalb ist die Funktion dort auch nicht differenzierbar.

c) $D = (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \cup (\mathbb{R}_- \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_- \setminus \{0\})$
$W = [-1, 1]$

- $\partial_x f(x, y) = -\sin \frac{\ln xy}{y} \cdot \frac{1}{xy}$
- $\partial_y f(x, y) = -\sin \frac{\ln xy}{y} \cdot \frac{1 - \ln xy}{y^2}$
- $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} = -\sin \frac{\ln xy}{y} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{xy} \\ \frac{1 - \ln xy}{y^2} \end{pmatrix}$

- $D_v f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \partial_x f(x, y) - 2 \partial_y f(x, y)$

d) $Df(x_0, y_0) = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} (x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{x_0} & \frac{1}{y_0} \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Gradient und Höhenlinien

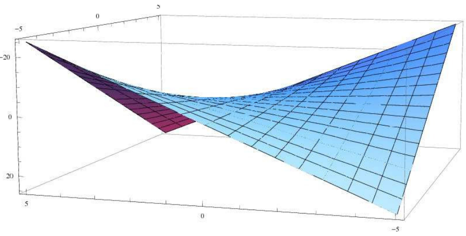

Abbildung 1: Plot der Funktion $f(x,y) = xy$

a) Höhenlinien (Abb. 2) findet man durch Konstantsetzen der Funktion
$f(x,y) = xy = c = x_0 y_0$, $c \in \mathbb{R}$ $\qquad \Rightarrow y(x) = \frac{x_0 y_0}{x}$

b) Der Gradient (Abb. 3) ist $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

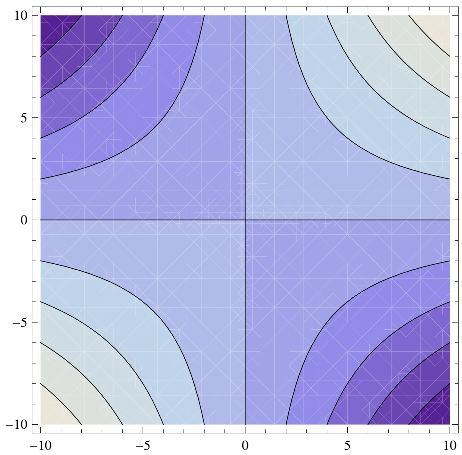

Abbildung 2: Höhenlinien

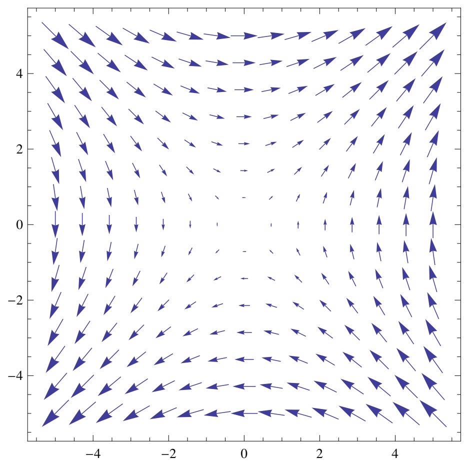

Abbildung 3: Gradient

c) Die Gleichung einer Höhenlinie ist $y(x) = \frac{x_0 \cdot y_0}{x}$. Die Tangente an einen Punkt der Höhenlinie kann beschrieben werden durch

$$T(x) = y_0 + y'(x_0) \cdot (x - x_0) = y_0 - \frac{y_0}{x_0} \cdot (x - x_0) = -\frac{y_0}{x_0} \cdot x + 2y_0$$

Um zu zeigen, dass der Gradient senkrecht zur Tangente steht, bildet man das Skalarprodukt des Gradienten im Punkt (x_0, y_0) mit dem Richtungsvektor $v = (1, -\frac{y_0}{x_0})$ der Tangente:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{y_0}{x_0} \end{pmatrix} = y_0 - x_0 \cdot \frac{y_0}{x_0} = 0 \qquad \Rightarrow v(x_0, y_0) \perp \nabla f(x_0, y_0) \qquad \forall (x_0, y_0)$$

d) Die DGL lautet ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha y \\ -\alpha x \end{pmatrix}$$

Leitet man die zweite Komponente ab und setzt $\dot{x}$ ein, erhält man ein Differentialgleichungssystem
$\ddot{x} = \alpha^2 x$
$\ddot{y} = \alpha^2 y$
das man beispielsweise mit Exponentialansatz $x(t) = A \cdot e^{\lambda t}$ (für y analog) mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\dot{x}(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$ lösen kann:
$x(t) = \frac{x_0}{2} \cdot e^{\alpha t} + \frac{x_0}{2} \cdot e^{-\alpha t} = x_0 \cdot \cosh \alpha t$
$y(t) = \frac{y_0}{2} \cdot e^{\alpha t} + \frac{y_0}{2} \cdot e^{-\alpha t} = y_0 \cdot \cosh \alpha t$

Nach Eliminierung des Ausdrucks $\cosh \alpha t$ erhält man für die Bahnkurve des langsamen Öltröpfchens

$$y(t) = \frac{y_0}{x_0} \cdot x$$

Der Hintergrund hierbei ist, dass sich das Öltröpfchen aufgrund der starken Reibung quasistatisch bewegt, also immer „bergab“ fließt und nie noch Schwung übrig hat. Somit bewegt es sich geradlinig abwärts (allein aus der Bahnkurve kann keine Richtung abgelesen werden!).

Aufgabe 3: Partielle Differenzierbarkeit

Die Funktion ist für $(x, y) \neq 0$ stetig als Komposition stetiger Funktionen. Für (0,0) betrachtet man

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq x^2+y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Die Funktion ist also auf dem gesamten Definitionsbereich stetig. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist die Funktion partiell differenzierbar und in (0,0) gilt:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h^2} = 0$$

analog gilt $\partial_y f(0, 0) = 0$. Also ist f auch partiell differenzierbar.

Aufgabe 4: Differenzierbarkeit

a) ☒ f ist total differenzierbar in x_0. $\Rightarrow$ f ist stetig in x_0
☐ f ist partiell differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ f ist stetig in x_0
☐ f ist partiell differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ f ist total differenzierbar in x_0
☒ f ist stetig partiell differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ f ist stetig in x_0
☒ f ist total differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ f ist partiell differenzierbar in x_0
☐ Die Richtungsableitungen für beliebige Richtung ex. in x_0 $\Rightarrow$ f ist stetig partiell differenzierbar

Erklärungen: siehe Skript von Dienstag unter Differenzierbarkeit

b)
- $D_v f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1,hv_2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\sqrt{h^2 v_1 v_2}\frac{h^2 v_2^2}{h^2(v_1^2+v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \sqrt{v_1 v_2}\frac{v_2^2}{v_1^2+v_2^2} =$
$= \sqrt{v_1 v_2} v_2^2 = \underline{\sqrt{v_1 v_2^5}}$
- Die partiellen Ableitungen existieren, da sie einer Richtungsableitung mit der Richtung (1,0) bzw. (0,1) entsprechen und die Existenz der Richtungsableitung schon gezeigt wurde.

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} D_{(1,0)} f(0,0) \\ D_{(0,1)} f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Es soll die Definition der totalen Ableitung an der Stelle ((0,0),f(0,0)) verwendet werden und außerdem y=(h,h) als Nullfolge. Beachte, dass $f(0) = 0$ und $Df(0) = 0$

$$\lim_{y=(h,h)\to 0} \frac{|f(0+y) - f(0) - Df(0)y|}{|y|} = \lim_{(h,h)\to 0} \frac{|f(h,h)|}{|(h,h)|} = \lim_{(h,h)\to 0} \frac{h^3}{2h^2 \cdot \sqrt{h^2+h^2}} =$$

$$= \lim_{(h,h)\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

Also erfüllt der Differentialquotient die Definition nicht und somit ist die Funktion bei 0 nicht differenzierbar.

- $\Rightarrow$ Das kann man ohen weitere Rechnung nicht sagen, da Stetigkeit aus Differenzierbarkeit folgen würde, die Funktion aber nicht differenzierbar ist. **Partielle Ableitungen kann es auch geben, falls die Funktion unstetig ist!!**

Aufgabe 5: Summenregel

$f,g : U \to \mathbb{R}^m$, f,g bei $x \in U \subset \mathbb{R}$ differenzierbar.
Setze A=Df(x)+Dg(x). Wir interessieren und für die Funktionensumme (f+g) an der Stelle x, also setzen wir dies in die Definition der totalen Ableitung ein. A=Df(x)+Dg(x), da wir zeigen wollen, dass dies die Ableitung der Funktionensumme (f+g) ist.

$$\lim_{y\to 0} \frac{|(f+g)(x+y)-(f+g)(x)-Ay|}{|y|}$$

Zu zeigen ist jetzt nur noch, dass dieser Ausdruck wie in der Definition verlangt, null ergibt.

$$\lim_{y\to 0} \frac{|(f+g)(x+y)-(f+g)(x)-Ay|}{|y|} \overset{def.}{=} \lim_{y\to 0} \frac{|f(x+y)+g(x+y)-f(x)-g(x)-Df(x)y-Dg(x)y|}{|y|} \leq$$

$$\leq \lim_{y\to 0} \frac{|f(x+y)-f(x)-Df(x)y(|}{|y|} + \lim_{y\to 0} \frac{|g(x+y)-g(x)-Dg(x)y|}{|y|} \overset{def.}{=} 0+0=0$$

Aufgabe 6: Kettenregel

a) $Df(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_3} & -\frac{x_2}{x_3} \end{pmatrix}$

$Dg(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ \cos y_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_2} \end{pmatrix}$

$$D(g\circ f)(x) = Dg(y)Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ \cos y_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_3} & -\frac{x_2}{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1+\frac{1}{x_3} & -\frac{x_2}{x_3} \\ x_2\cos y_1 & x_1\cos y_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_2x_3} & -\frac{x_2}{y_2x_3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1+\frac{1}{x_3} & -\frac{x_2}{x_3} \\ x_2\cos x_1x_2 & x_1\cos x_1x_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & -1 \end{pmatrix}$$

wobei im letzten Schritt die Transformation

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ \frac{x_2}{x_3} \end{pmatrix}$$

eingesetzt wurde, da die Verkettung der Funktionen von x abhängen soll.

b) $D(g\circ f)(\frac{\pi}{e},e,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e & \frac{\pi}{e}+1 & -e \\ e & \frac{\pi}{e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} & -1 \end{pmatrix}$