THOMAS SIEGERT

Übungsblatt Ferienkurs Analysis II

15.09.2009

Differentialgleichungen

Aufgabe 1)

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung: $y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = 0$

a) Welche Dimension hat diese DGL?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

b) Welche Funktionen lösen diese DGL?

☐ e^x ☐ xe^x ☐ $e^x\cos(x)$ ☐ $e^x\sin(x)$ ☐ $e^x(\sin(x) - \cos(x))$ ☐ 0

c) Wie lautet die Menge aller Lösungen der Gleichung:
$y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = 2$?

Aufgabe 2)

Reduzieren Sie die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 6x(t) = 0$ auf eine DGL 1. Ordnung und lösen Sie diese mit Hilfe des Matrixexponentials zu den Anfangswerten $x(0) = 5, \dot{x}(0) = 5$. Überprüfen Sie die Richtigkeit der Ergebnisse.

Aufgabe 3)

a) Geben Sie ein Fundamentalsystem zur Differentialgleichung
$\frac{1}{16}\ddot{x}(t) - \frac{1}{4}\dot{x}(t) + \frac{1}{2}x(t) = b$ für $b = 0$ an.

b) Lösen Sie die inhomogene DGL für $b = \frac{1}{8}$ zu den Anfangswerten $x(0) = \frac{1}{2}, \dot{x}(0) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 4)

Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_3 \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Funktionalmatrix **A** an.

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \qquad\qquad}$$

b) Lösen Sie das DGL-System mit Hilfe des Matrixexponentials zum Anfangswert

$$\boldsymbol{x}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5)

Geben Sie alle Lösungen zu folgenden Differentialgleichungen an:

a) $x(t)x'(t) = 12t^2$

b) $\left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right)^2 = 4\left(\frac{x}{y(x)}\right)^2 - 4x^2$

c) $x^{-x} = \frac{\ln(x)}{y'(x)} + \frac{1}{y'(x)}$

Übungsaufgaben zur Differentialrechnung

für Dienstag, 15.9.09
von Carla Zensen

Aufgabe 1: Definitionen

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{R}^3)$
Wie ist $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x)$ definiert? Wie ist die Funktion $\frac{\partial}{\partial x_1} f$ definiert? Was ist der Unterschied?

b) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = \frac{x^y}{z} \qquad a = (1,2,3)$
Berechne

- $\partial_x f(x,y,z)$, $\partial_y f(x,y,z)$, $\partial_z f(x,y,z)$, $\partial_y \partial_x f(x,y,z)$, $\partial_x \partial_y f(x,y,z)$
- den Gradienten $\nabla f(a)$ im Punkt a

Ist die Funktion stetig auf $\mathbb{R}^3$? Ist sie dort überall differenzierbar?

c) $f : D \to W$, $f(x,y) = \cos \frac{\ln xy}{y}$
Bestimme die Definitionsmenge D und Wertemenge W dieser Funktion und berechne für diese Punkte die ersten partiellen Ableitungen, den Gradienten und die Richtungsableitung in Richtung $(1,-2)$!

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (x+y, \ln xy)$
Berechne die Ableitung von f im Punkt (x_0, y_0)!

Aufgabe 2: Gradient und Höhenlinien

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x \cdot y$$

a) Beschreibe die durch f gegebene Fläche durch Skizzieren der Höhenlinien!

b) Berechne den Gradienten von f und skizziere auch diesen.

c) Bestimme die Tangente an die Höhenlinie im Punkt (x_0, y_0) und zeige, dass diese immer senkrecht zum Gradienten in diesem Punkt steht.

d) Im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ wird ein sehr langsam kriechendes Öltröpfchen auf die Fläche gesetzt, wobei seine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ ist. Welche Bahnkurve beschreibt es bei seiner kriechenden Fortbewegung?
Hinweis: Die Bewegung wird näherungsweise durch folgende DGL beschrieben:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = -\alpha \nabla f(x,y)$$

Löse die DGL mit $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$ und finde die entsprechende Bahnkurve y(x) durch Elimierung der Zeit aus der Lösung (x(t),y(t)) der DGL

Aufgabe 3: Partielle Differenzierbarkeit

Ist $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig? Ist diese Funktion partiell differenzierbar?

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aufgabe 4: Differenzierbarkeit

a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$. Welche Aussagen sind richtig in einem Punkt $x_0 \in U$?

- ☐ f ist total differenzierbar in x_0. $\Rightarrow$ f ist stetig in x_0
- ☐ f ist partiell differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ f ist stetig in x_0
- ☐ f ist partiell differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ f ist total differenzierbar in x_0
- ☐ f ist stetig partiell differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ f ist stetig in x_0
- ☐ f ist total differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ f ist partiell differenzierbar in x_0
- ☐ Richtungsabl. für beliebige Richtung ex. in x_0 $\Rightarrow$ f ist stetig partiell differenzierbar

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{xy}\frac{y^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$

- Man berechne die Richtungsableitung im Punkt $a = (0,0)$ und für die Richtung $v = (v_1, v_2)$ mit $|v| = 1$

  $D_v f(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)}{h} =$

- Leite aus der Existenz der Richtungsableitungen die partiellen Ableitungen im Ursprung her (Begründung verlangt!) und gib den Gradienten an!

  $\nabla f(a) =$

- Zeige, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist!
  Hinweis:
  Benutze die Definition der totalen Ableitung $\lim\limits_{y \to 0} \frac{|f(x+y)-f(x)-Df(x)y|}{|y|} = 0$ *und wähle y=(h,h)*
- Ist f im Ursprung also unstetig?
  ☐ Ja ☐ Nein ☐ Kann man ohne weitere Rechnung nicht sagen

Aufgabe 5: Summenregel

Zeige die Summenregel $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$ und vergiss nicht, die notwendigen Voraussetzungen zu treffen! *Hinweis: Definition der totalen Ableitung benutzen!*

Aufgabe 6: Kettenregel

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \frac{x_2}{x_3} \end{pmatrix} \qquad g : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 + y_2 \\ \sin y_1 \\ \ln y_2 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $Df(x)$, $Dg(x)$, $D(g \circ f)(x)$ allgemein

b) Berechne $D(g \circ f)(x)$ im Punkt $(\frac{\pi}{e}, e, 1)$