THOMAS SIEGERT

Lösungsvorschlag zum Übungsblatt:

Funktionen und Stetigkeit

Aufgabe 1)

a) Fallunterscheidung: $|\arcsin(x)| = \begin{cases} \arcsin(x), & x \geq 0 \\ -\arcsin(x), & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0+0} \arcsin(x) = \lim_{x \to 0-0} (-\arcsin(x)) = f(0) = 0$$

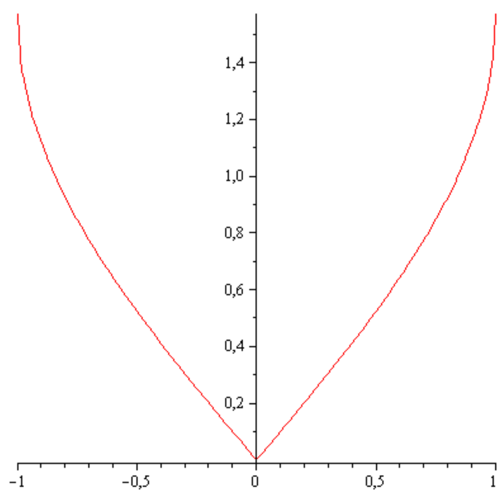
Somit is f bei $x = 0$ stetig.

Differenzierbarkeit: $\frac{d}{dx}|\arcsin(x)| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0-0} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Also ist f bei $x = 0$ nicht differenzierbar.

b) Graph von $|\arcsin(x)|$



Aufgabe 2)

a) Wähle (x_n, y_n), so dass f bei Null konstant wird: $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$

$$f(x_n, y_n) = -\frac{6\left(\frac{1}{n}\right)^{-2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^3}{2\left(\frac{1}{n}\right)^4 + 6\left(\frac{1}{n^2}\right)^2} = -\frac{6\left(\frac{1}{n}\right)^4}{8\left(\frac{1}{n}\right)^4} = -\frac{3}{4} \neq 0$$

Also ist f am Ursprung nicht stetig.

b) $g(x, y) = h(y + 1, x^2 + 1) = -\frac{6(y+1)^2(x^2+1)^3}{2(y+1)^4+6(x^2+1)^2}$

Untersuchung des Nenners auf Nullstellen: $(y + 1)^4 + 3(x^2 + 1)^2 = 0$

$$y = \left(\pm(-6(x^2 + 1)^2)^{\frac{1}{4}} - 1\right) \cdot 2^{-\frac{1}{4}} \ \vee \ x = \pm\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}(y + 1)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Die Terme innerhalb der Quadrat- bzw. Biquadratwurzel bleiben immer negativ, weswegen es keine reellen Nullstellen des Nenners gibt.
$\Rightarrow g(x, y)$ ist als Kombination stetiger Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Aufgabe 3)

a) Parametrisierung: $\begin{pmatrix} r(x, y) \\ \phi(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x(r, \phi) \\ y(r, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix}$

$$f(r, \phi) = \frac{e^{r^2-1}}{r^2}, \lim_{r\to 0}\frac{e^{r^2-1}}{r^2} = \infty \neq 0$$

f ist also nicht stetig bei der Null.

b) Fallunterscheidungen von links und rechts an die Null:

$$\lim_{h\to 0\pm 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0\pm 0}\left(\frac{e^{h^2-1}}{h^3}\right) = \pm\infty$$

$$\lim_{h\to 0\pm 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0\pm 0}\left(\frac{e^{h^2-1}}{h^3}\right) = \pm\infty$$

$f(x,y)$ ist nicht differenzierbar am Ursprung, da f nicht stetig am Ursprung.

c) Nach Aufgabe a) existiert die stetige Fortsetzung bei Null nicht.

Aufgabe 4)

a) Hinweis: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \ldots$ und $\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + \ldots$ Somit ist

$$f(x,y) = \frac{\sin(x)\sin(y)}{xy} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)\left(y - \frac{y^3}{6} + \cdots\right)}{xy} =$$

$$= \frac{xy - \frac{xy^3}{6} - \frac{yx^3}{6} + \frac{(xy)^3}{36} \pm \cdots}{xy} = 1 - \frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{6} + \frac{(xy)^2}{36} \ldots$$

Lässt man nun (x,y) gegen $(0,0)$ gehen, so ist $f(0,0) = 1$, was auch in der Angabe steht. Somit ist $f(x,y)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

b) $(\partial_x(1 - \frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{6} + \frac{(xy)^2}{36} \ldots))(0,0) = -\frac{x}{3} + \frac{1}{18}xy^2 \ldots|_{(0,0)} = 0$

c) $(\partial_y(1 - \frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{6} + \frac{(xy)^2}{36} \ldots))(0,0) = -\frac{y}{3} + \frac{1}{18}xy^2 \ldots|_{(0,0)} = 0$

d) $D_f(0,0) = ((\partial_x f)(0,0) \quad \left(\partial_y f\right)(0,0)) = (0 \quad 0)$

e) $(\partial_x f)\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(y)}{y} \cdot \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{8}{\pi^3}$

$(\partial_y f)\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\cos(y)y-\sin(y)}{y^2}\Big|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{8}{\pi^3}, \Rightarrow D_f\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{8}{\pi^3} & -\frac{8}{\pi^3} \end{pmatrix}$

Aufgabe 5)

a) $|b(x) - b(y)| = \left|\frac{(6x^2+6)(y^2+11)-(6y^2+6)(x^2+11)}{(x^2+11)(y^2+11)}\right| = \left|\frac{6(xy)^2+66x^2+6y^2+66-6(xy)^2-6x^2-66-66y^2}{(x^2+11)(y^2+11)}\right| = \left|\frac{60x^2-60y^2}{(x^2+11)(y^2+11)}\right| \leq$

$$\leq |x-y| \cdot \frac{60|x+y|}{(x^2+11)(y^2+11)}$$

Die Funktion ist größer als 0.5, man kann also abschätzen und kommt (mit der angegebenen Hilfe ohne Taschenrechner) auf

$$L \geq \frac{60\cdot 1}{\left(\frac{45}{4}\right)^2} = \frac{60\cdot 16}{45^2} = \frac{2^6\cdot 3\cdot 5}{3^4\cdot 5^2} = \frac{2^6}{3^3\cdot 5} < 1 < \infty.$$

Wenn man die andere Intervallgrenze einsetzt, kommt man auf

$$L \leq \frac{2^5\cdot 3^4}{5\cdot 23^2} < 1 < \infty.$$

Also ist $b(x)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$. b ist also eine Kontraktion und besitzt einen Fixpunkt.

b) $b(x_\infty) = x_\infty \Leftrightarrow \frac{6x_\infty^2+6}{x_\infty^2+11} = x_\infty \Leftrightarrow x_\infty^3 - 6x_\infty^2 + 11x_\infty - 6 = 0 \Leftrightarrow$
$Drei\ Lösungen$:
$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3 \Leftrightarrow 1 = x_1 = x_\infty$ ist der Fixpunkt im geg. Intervall.

Aufgabe 6)

a) $\dot{l}(t) = \begin{pmatrix} t^2+2 \\ t^2-2 \end{pmatrix}, |\dot{l}(t)| = \sqrt{(t^2+2)^2 + (t^2-2)^2} = \sqrt{2t^4+8}$

$$\int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}^{4^{\frac{1}{4}}} f\big(x(t),y(t)\big) \cdot |\dot{l}(t)|\, dt = \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}^{4^{\frac{1}{4}}} \frac{2}{3} t^3 \sqrt{2t^4+8}\, dt = (*)$$

Substitution:

$$u(t) = 2t^4 + 8 \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = 8t^3 \Leftrightarrow du = 8t^3 dt, u\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = 9, u\left(4^{\frac{1}{4}}\right) = 16$$

$$(*) = \int_9^{16} \frac{2}{3 \cdot 8}\sqrt{u}\ du = \frac{1}{12}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_9^{16} = \frac{37}{18}$$

b) $\boldsymbol{k}(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}, \dot{\boldsymbol{k}}(t) = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\dot{\boldsymbol{k}}(t)\right| = 1$

$$\int_0^{2\pi} (\cos(t) + \sin(t))\ dt = [\sin(t) - \cos(t)]_0^{2\pi} = 0 - 1 - (0 - 1) = 0$$

c) $\dot{\boldsymbol{g}}(t) = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow |\dot{\boldsymbol{g}}(t)| = 1$

$$\int_0^2 (1 + t)dt = \left[t + \frac{1}{2}t^2\right]_0^2 = 4$$

Aufgabe 7)

$$\dot{\boldsymbol{h}}(t) = \begin{pmatrix}1\\ 2t\\ 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\dot{\boldsymbol{h}}(t)\right| = \sqrt{2 + 4t^2},$$

$$s\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1 - t^4 + 2t^2 + 1} = \sqrt{2 + 4t^2}$$

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{2 + 4t^2}^{\,2}\ dt = \int_{-2}^{2} |2 + 4t^2|\ dt = \left[2t + \frac{4}{3}t^3\right]_{-2}^{2} = \frac{88}{3}$$

Aufgabe 8)

$$\tan(\alpha) = \frac{\kappa(t)}{t} == \frac{\sqrt{1 - t^2}}{t} = \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1} \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)}} := t(\alpha)$$

$$\kappa\big(t(\alpha)\big) = \sqrt{1 - \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}} = \sqrt{\frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}} = \sqrt{\frac{\tan^2(\alpha)}{\frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}}$$
$$= \tan(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(\alpha)$$

Aufgabe 9)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow |\dot{\boldsymbol{x}}(t)|^3 = \sqrt{\sinh^2(t)+\cosh^2(t)+1}^3 = \sqrt{2\cosh^2(t)}^3 =$$
$$= \sqrt{2}^3 \cosh(t)^3$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow |\dot{\boldsymbol{x}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{x}}(t)| = \left|\begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 1 \end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{\sinh^2(t)+\cosh^2(t)+1} = \sqrt{2\cosh^2(t)} = \sqrt{2}\cosh(t)$$

$$R(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \frac{\sqrt{2}^3\cosh(t)^3}{\sqrt{2}\cosh(t)} = 2\cosh^2(t)$$

$$B(t) = \int_0^t \left|\begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 1 \end{pmatrix}\right| dt = \int_0^t \sqrt{\sinh^2(t)+\cosh^2(t)+1}\, dt = \int_0^t \sqrt{2}\cosh(t)\ dt$$
$$= \sqrt{2}\sinh(t)$$

$$\Leftrightarrow t = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{B}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow R(B) = 2\cosh^2\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{B}{\sqrt{2}}\right)\right) = 2\left(\sqrt{\left(\frac{B}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\right)^2 = B^2+2$$

Aufgabe 10)

a) $\dot{\boldsymbol{s}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{8\pi}} \boldsymbol{r}(t) \circ \dot{\boldsymbol{s}}(t)dt = \int_0^{\sqrt{8\pi}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt =$

$$=\int_0^{\sqrt{8\pi}} t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\sqrt{8\pi}} = 4\pi$$

b) $$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{F}\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \begin{pmatrix} \frac{\sinh(t)-\cosh(t)}{\cosh^2(t)\sinh(t)-\sinh^3(t)} \\ \frac{2\cosh(t)\sinh(t)+2t}{\cosh^3(t)+\cosh(t)t^2-1} \\ \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\coth(t) \\ \frac{2\sinh(t)+\frac{2t}{\cosh(t)}}{\cosh^2(t)+t^2-1} \\ \tanh(t) \end{pmatrix}, \Leftrightarrow \int \begin{pmatrix} 1-\coth(t) \\ \frac{2\sinh(t)+\frac{2t}{\cosh(t)}}{\cosh^2(t)+t^2-1} \\ \tanh(t) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int \left(\sinh(t) - \cosh(t) + \frac{2\cosh(t)\sinh(t) + 2t}{\cosh^2(t) + t^2 - 1} + \tanh(t)\right) dt =$$

$$= \cosh(t) - \sinh(t) + \ln\left|cosh^2(t) + t^2 - 1\right| + \ln(cosh(t)) + C, C \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 11)

a) f ist als Kombination stetiger Funktionen ebenfalls stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

b) $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \sin\left(\frac{1}{xy}\right)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(xy)^2}} \Leftrightarrow$ Angenommen wir verwenden die Methode mit den Nullfolgen: $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{1}{n}$, dann ist $f(x_n, y_n) = \frac{n}{\sqrt{2}} \cdot \sin(n^2)$. Für $n \to \infty$ ist dieser Wert nicht definiert, also ist $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ nicht stetig.

c) $\dot{\boldsymbol{g}}(t) = \binom{3}{4} \Leftrightarrow |\dot{\boldsymbol{g}}(t)| = 5, f\big(x(t), y(t)\big) = \sin(12\mathrm{t}^2) \cdot 5\mathrm{t}$

$$\Leftrightarrow \int_0^t f\big(x(t), y(t)\big) \cdot |\dot{\boldsymbol{g}}(t)|\, dt = \int_0^t \sin(12\mathrm{t}^2) \cdot 25\mathrm{t}\, \mathrm{dt} =$$

$$= \int_0^t \sin(12t^2) \cdot \frac{25}{2} \cdot 2t\, dt = (*)$$

Substitution:

$$u(t) = t^2 \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = 2t \Leftrightarrow du = 2t \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{t^2} \frac{25}{2}\sin(12u)\ du = \frac{25}{2}\left[-\frac{1}{12}\cos(12u)\right]_0^{t^2} = -\frac{25}{24}(\cos(12t^2) - 1) := G(t)$$

d) $\frac{d}{dt}G(t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{25}{24}(\cos(12t^2) - 1)\right) = -\frac{25}{24}(-\sin(12t^2)\,24t)) = 25t\sin(12t^2) = 0$

$$\Leftrightarrow t_0 = 0;\ 12t_k^2 = k\pi \Leftrightarrow t_k = \pm\sqrt{\frac{k}{12}\pi}; t \geq 0 \Rightarrow t_k = \sqrt{\frac{k}{12}\pi}$$

Da $t \leq 1$, gilt: $\quad t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{12}}, \qquad t_2 = \sqrt{\frac{\pi}{6}}, \qquad t_3 = \sqrt{\frac{\pi}{4}}.$

Zweite Ableitung zur Untersuchung ob Min. o. Max:

$$\frac{d^2}{dt^2}G(t) = \frac{d}{dt}(25t\sin(12t^2)) = 25\sin(12t^2) + 25t \cdot \cos(12t^2)\,24t =$$
$$= 25\sin(12t^2) + 600t^2\cos(12t^2) = G''(t)$$

$$G''(t_0) = 0 \Leftrightarrow Terrassenpunkt\ bei\ (0{,}0)$$
$$G''(t_1) < 0 \Leftrightarrow Maximum\ bei\ \left(\sqrt{\frac{\pi}{12}}, \frac{25}{12}\right)$$
$$G''(t_2) > 0 \Leftrightarrow Minimum\ bei\ \left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}, 0\right)$$
$$G''(t_3) < 0 \Leftrightarrow Maximum\ bei\ \left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \frac{25}{12}\right)$$
$$Untersuchung\ des\ Randes\ \{0,1\}: G(1) \approx 0.16; G(0)\ s.o.$$

$$\Leftrightarrow G(t_1) = G(t_3) = \frac{25}{12}$$
$$\Leftrightarrow Es\ ex.\ also\ kein\ globales\ Maximum, nur\ lokale.$$

e) <u>Taylorentwicklung des Kosinus:</u> $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$$\Leftrightarrow \tilde{G}(t) = -\frac{25}{24}\left(1 - \frac{1}{2}(12t^2)^2 - 1\right) = -\frac{25}{24}(-72t^4) = 75t^4$$

Ist $\tilde{G}(t)$ Lipschitz-stetig auf $\left[0,\frac{1}{8}\right]$?

$$\left|\tilde{G}(x)-\tilde{G}(y)\right| = |75x^4 - 75y^4| \leq 75|x^2-y^2||x^2+y^2| \leq$$
$$\leq 75|x-y||x+y||x^2+y^2| = |x-y|\cdot 75|x+y||x^2+y^2|$$

Nun kann man mit den Intervallgrenzen abschätzen:

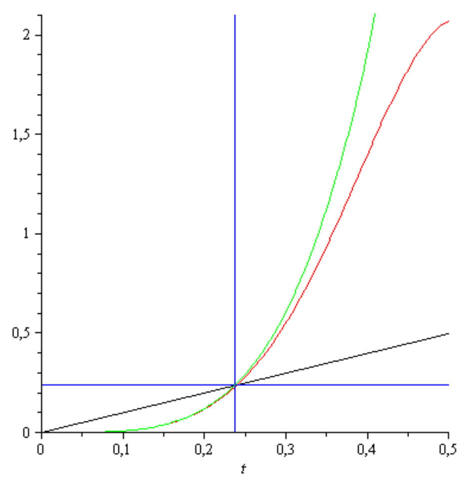
$$0 \leq L \leq 75\left|\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right|\left|\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2\right| = \frac{75}{128} < 1$$

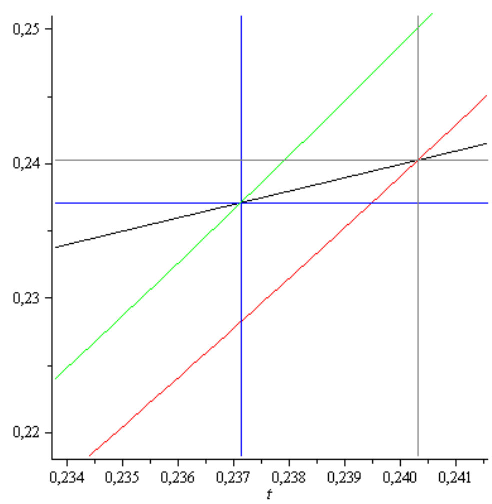
$\tilde{G}(t)$ ist also Lipschitz-stetig ($L<\infty$) und ist gleichzeitig eine Kontraktion in diesem Bereich ($L<1$). $\tilde{G}(t)$ besitzt demnach einen Fixpunkt t_∞.

$$t_\infty = \tilde{G}(t_\infty) \Leftrightarrow\ 75t_\infty^4 = t_\infty \Leftrightarrow t_\infty = \sqrt[3]{\frac{1}{75}} \approx 0.237$$

Da wir $G(t)$ nur bis zur 2. Ordnung in t um die Null genähert haben und die Kosinus-Funktion periodisch ist, kann man nur schwer abschätzen, wo der Fixpunkt dieser Funktion liegt.

Allerdings ist das erste Maximum der Kosinus-Funktion erst bei $t=\sqrt{\frac{\pi}{12}}$, weswegen man davon ausgehen kann, dass der Fixpunkt auch in der Nähe von 0.237 liegt. (Numerische Berechnung mit einem Mathematik-Programm ergibt $t_\infty = 0.240$.)





Die obere Funktion ist $75t^4$, die untere die cos-Fkt.. Auf dem linken Bild erkennt man, dass die Taylorentwicklung bis zur 2. Ordnung eine relativ gute Näherung ist. Geht man jedoch zu den Fixpunkten im rechten Bild, so erkennt man einen Fehler, der stetig ansteigt.