THOMAS SIEGERT

Übungsblatt Ferienkurs Analysis II

14.09.2009

Funktionen und Stetigkeit

Aufgabe 1)

a) Zeigen Sie, dass $f: [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = |\arcsin(x)|$ bei $x = 0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist.
b) Skizzieren Sie den Graph von $f(x)$.

Aufgabe 2)

a) Ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} -\frac{6x^{-2}y^3}{2x^4+6y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stetig?

Begründung!

b) Gegeben ist nun die Funktion: $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(x,y) = -\frac{6x^2y^3}{2x^4+6y^2}$. Ist die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x,y) = h(y+1, x^2+1)$ stetig? Begründung!

Aufgabe 3)

a) Überprüfen Sie, ob die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2-1}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

auf ihrem ganzen Definitionsbereich stetig ist.
(*Hinweis*: Parametrisierung durch Polarkoordinaten.)

b) Berechnen Sie

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \text{ und } \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

Ist f differenzierbar? Begründung!

c) Berechnen Sie die stetige Fortsetzung von $f(x,y)$ bei $(0,0)$.

Aufgabe 4)

Gegeben sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x)\sin(y)}{xy}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Wieso ist f auf dem ganzen Definitionsbereich stetig? (*Hinweis*: Taylorentwicklung von $\sin(x)$ und $\sin(y)$.)

b) Die partielle Ableitung $(\partial_x f)(0,0)$ ist

☐ π ☐ 1 ☐ 0 ☐ -1 ☐ $-\frac{1}{4}$ ☐ nicht definiert.

c) Die partielle Ableitung $(\partial_y f)(0,0)$ ist

☐ π ☐ 1 ☐ 0 ☐ -1 ☐ $-\frac{1}{4}$ ☐ nicht definiert.

d) Wie lautet die totale Ableitung (Jacobi-Matrix) bei $(0,0)$?

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ existiert nicht

e) Wie lautet die totale Ableitung bei $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$?

☐ $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\pi \\ \frac{2}{4}\pi^2 & -\frac{3}{8}\pi^3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} \frac{8}{\pi^3} & -\frac{8}{\pi^3} \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -\frac{\pi^3}{8} & \frac{\pi^3}{8} \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ existiert nicht

Aufgabe 5)

<u>Banach'scher Fixpunktsatz:</u>

In einem <u>vollständigen metrischen Raum</u> (X,d) gilt für eine <u>Kontraktion</u> $f: X \to X$:

i) f hat genau einen Fixpunkt: $\exists_1 x_\infty \in X: f(x_\infty) = x_\infty$

ii) Für jeden Startwert $x_0 \in X$ konvergiert die Iterationsfolge $x_{n+1} := f(x_n)$ gegen
$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Gegeben sei die Funktion $b: \left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right] \to \mathbb{R}, b(x) = \frac{6x^2+6}{x^2+11}$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion Lipschitz-stetig ist. (*<u>Hilfe:</u> Primfaktorzerlegung…*)

b) Wo befindet sich der Fixpunkt von $b(x)$ im definierenden Intervall?

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{3}{3}$ ☐ $\frac{4}{3}$ ☐ $\frac{6}{3}$ ☐ *es ex. kein FP*

Aufgabe 6)

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(x, y) = x + y$ entlang der Kurve
$$\boldsymbol{l}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 + 2t - \sqrt{7} \\ \frac{1}{3}t^3 - 2t + \sqrt{7} \end{pmatrix}$$ im Intervall $\left[\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \sqrt[4]{4}\right]$.
(<u>Hinweis:</u> *Es lohnt die Substitution* $u(t) = 2t^4 + 8$ *an geeigneter Stelle.*)

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral von f entlang des Einheitskreises.

c) Berechnen Sie das Kurvenintegral von f entlang der Kurve $\boldsymbol{g}(t) = \binom{1}{t}$ im Intervall $[0,2]$

Aufgabe 7)

Berechnen Sie das Kurvenintegral von $s(x, y, z) = \sqrt{(x^2 + 1)^2 - y^2 + 2z^2 + 1}$ entlang der Kurve $\boldsymbol{h}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$ im Intervall $[-2,2]$.

$$\int_h s(x, y, z) dh = \boxed{}$$

Aufgabe 8)

Parametrisieren Sie die Kurve $\kappa(t) = \sqrt{1 - t^2}$ im Intervall $[-1,1]$ nach ihrem Winkel α zur t-Achse.

Aufgabe 9)

Berechnen Sie den Krümmungsradius $R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ mit $\kappa(t) = \frac{|\dot{\boldsymbol{x}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{x}}(t)|}{|\dot{\boldsymbol{x}}(t)|^3}$ der Kurve $x(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ t \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von der Zeit t und der Bogenlänge B.
(<u>Hinweis:</u> $cosh(arcsinh(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$)

$$R(t) = \boxed{} \qquad R(B) = \boxed{}$$

Aufgabe 10)

a) Berechnen Sie die Arbeit im Feld $\boldsymbol{r}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ entlang der Schraubenlinie

$$s(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$ im Intervall $[0, \sqrt{8\pi}]$.

b) Berechnen Sie die Arbeit im Feld $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y-x}{x^2y-y^3} \\ \frac{2xy+2z}{x^3+xz^2-1} \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix}$ entlang der Kurve

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ t \end{pmatrix}$$ in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 11) (schwerer)

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\sin(xy)$.

a) Ist die Funktion $f(x,y)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig? Begründung!
b) Ist die Funktion $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig? Begründung!
c) Berechnen Sie das Wegintegral von $f(x,y)$ entlang der Geraden $\boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von der Zeit t. ($t_0 = 0$)
d) Berechnen Sie das globale Maximum des Wegintegrals $G(t)$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$.
e) Nähern Sie $G(t)$ durch das Taylorpolynom 2. Ordnung um die Null. Besitzt $\tilde{G}(t)$ einen Fixpunkt zwischen $\left[0, \frac{1}{8}\right]$? Wenn ja, wo? Kann man daraus folgern, dass auch $G(t)$ einen Fixpunkt in diesem Bereich besitzt?