Jinming Lu, Konrad Schönleber

Repetitorium Theoretische Quantenmechanik, WS 08/09

1. **Zweiniveausystem**

   Der Hamiltonoperator eines Zweiniveausystems lautet

   $$\mathcal{H} = \varepsilon(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

   Dabei sind $|1\rangle$ und $|2\rangle$ die normierten Basiszustände. Der Parameter $\varepsilon > 0$ hat die Einheit einer Energie.

   (a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{H}$ bezüglich der geordneten Basis $(|1\rangle,|2\rangle)$

   (b) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte sowie die zugehörigen normierten Eigenzustände von $\mathcal{H}$.

   (c) Ein Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

   $$|\psi(0)\rangle = A(3|1\rangle + 4|2\rangle)$$

   Bestimmen Sie die Normierungskonstante A und die Wahrscheinlichkeit, bei einer Energiemessung zu einem Zeitpunkt $t > 0$ den größeren Energieeigenwert zu erhalten.

   (d) Wie groß sind jeweils die Wahrscheinlichkeiten, zu einem Zeitpunkt $t > 0$ das Teilchen im Zustand $|1\rangle$ bzw. $|2\rangle$ anzutreffen?

2. **Rechnen mit Kommutatoren**

   Gegeben seien die Komponenten des Drehimpulsoperators L_x, L_y, L_z und ein Operator A mit $[A, L_x] = [A, L_y] = 0$. Zeigen Sie: $[A, L_z] = 0$. *Hinweis: Setzen Sie für L_z die Relation $L_z = 1/(i\hbar)[L_x, L_y]$ ein.*

3. **Variationsprinzip**

   Betrachten Sie die auf 1 normierte Wellenfunktion

   $$\psi_L(x) = A \exp\left(-\frac{|x|}{L}\right)$$

   (a) Berechnen Sie die Normierungskonstante $|A|$

   (b) Sei

   $$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left[-\beta^2 \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{x}{\beta}\right)^2\right] \qquad \text{mit } \beta = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

   Für welchen Wert der Länge L ist der Erwartungswert $E_L = \langle\psi_L|\mathcal{H}|\psi_L\rangle$ minimal? Vergleichen Sie den minimalen Wert E_L mit dem exakten Energieeigenwert des Grundzustands von $\mathcal{H}$.

4. **Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld**

Betrachten Sie ein Teilchen der Ladung e im Potential eines harmonischen Oszillators. Zusätzlich wird ein elektrisches Feld F eingeschaltet. Der Hamilton-Operator ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}_{\mathcal{H}_0} + \underbrace{eFx}_{\mathcal{H}'}$$

(a) Geben Sie die exakten Energieeigenwerte von $\mathcal{H}$ an. *(Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Energieeigenwerte von $\mathcal{H}_0$ durch $E_n^0 = \hbar\omega(n + 1/2)$ gegeben sind. Formen Sie $\mathcal{H}$ geschickt um.)*

(b) Geben Sie die Eigenfunktionen von $\mathcal{H}$ an. *(Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Eigenfunktionen von $\mathcal{H}_0$ durch*

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

gegeben sind.)

(c) Betrachten Sie $\mathcal{H}'$ als kleiner Störterm und berechnen Sie in erster und zweiter Ordnung Störungestheorie die Energiekorrekturen $\Delta E_n^{(1)}$ und $\Delta E_n^{(2)}$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus der Teilaufgabe (a). *(Hinweis: Benutzen Sie Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren)*

(d) Wie würden Sie Störoperatoren der Form $\mathcal{H}' = \lambda x^2$, $\mathcal{H}' = \lambda x^3$, $\mathcal{H}' = \lambda x^4$ rechnerisch behandeln?