

Repetitorium Theoretische Quantenmechanik, WS 08/09

- 4.1** (Feinstruktur im Wasserstoffatom) Im Wasserstoffatom (und natürlich auch in allen anderen Atomen) erzeugt der Kern am Ort des Elektrons ein magnetisches Feld. Dieses Feld führt zu einer Aufhebung der energetischen Entartung der verschiedenen Drehimpulszustände zu einer Energie. Der Operator dieser Störung ist:

$$H_{FS} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m^2 c^2} \frac{1}{r^3} L \cdot S$$

Berechnen Sie die Energiekorrekturen 1.Ordnung der stationären Zustände, durch diesen Störoperator.

(Hinweis: $\langle \frac{1}{r^3} \rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3 a^3}$ für Eigenzustände zum Energieeigenwert $E_n = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a n^2}$)

- 4.2** (Variationsrechnung)

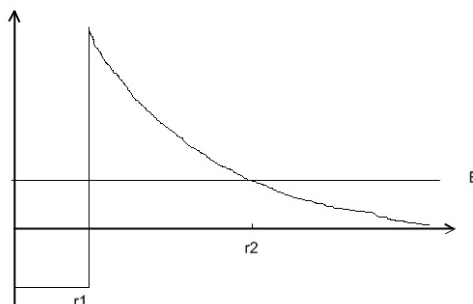
Verwenden Sie die Variationsmethode um die Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators zu bestimmen. Verwenden Sie dafür eine gaußförmige Testfunktion.

$$\Psi(x) = A e^{-bx^2}$$

(Hinweis: Lösen Sie die Integrale indem Sie $\int_0^\infty t^s e^{-t} dt = \Gamma(s+1)$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ und $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ verwenden. Weiterhin gilt: $\int_{-\infty}^\infty e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$)

- 4.3** (α -Zerfall)

Als Modell für den Mechanismus des α -Zerfalls wird folgendes Potential zugrundegelegt:



Rechts von der Barriere gilt dabei:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(Z-2)e^2}{r}$$

Man geht dabei davon aus, dass α -Teilchen sei schon im Kern vorhanden und seine kinetische Energie sei verantwortlich für das Überwinden der Potentialbarriere.

Die Lebensdauer des Teilchens ist dann proportional zur kinetischen Energie des α -Teilchens.

Berechnen Sie den Exponentialterm der kinetischen Energie in WKB-Näherung.

4.4 (Grundzustand des Heliumatoms)

Der Hamiltonoperator für das Heliumatom hat die Gestalt:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{|x_1 - x_2|} = H(1) + H(2) + V$$

Hier bezeichnet $H(i)$ einen Wasserstoffähnlichen Hamiltonoperator für die individuellen Elektronen und V die Wechselwirkung zwischen den beiden Elektronen.

Setzen Sie als radiale Grundzustandswellenfunktion unter Vernachlässigung der Elektron-Elektron-Wechselwirkung analog zum Wasserstoffatom an:

$$\Psi_i(r_1, r_2) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} e^{-2(r_1+r_2)/a}$$

a) Berechnen Sie in Störungstheorie die Energiekorrekturen 1. Ordnung durch die $e^- - e^-$ -Wechselwirkung.

(Hinweis: $\int_0^\pi \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta)}} d\theta = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta)}} d(\cos(\theta)) = \frac{2}{\max(r_1, r_2)}$)

b) Erklären Sie die Energieänderung durch eine effektive Abschirmung der Kernladung auf einen Wert Z^*e und berechnen Sie mit Hilfe des Variationsprinzips den Wert von Z^* . Zerlegen Sie dazu zunächst den Hamiltonoperator in wasserstoffähnliche Operatoren mit Kernladung Z^*e + Korrekturterme.

(Hinweis: Aus dem Virialsatz folgt $\langle \frac{1}{r} \rangle = \frac{Z}{a}$)

4.5 (Goldene Regel)

Ein ungestörtes System habe u.a. die stationären Eigenzustände $|m\rangle$ und $|n\rangle$. Zu Beginn befinde sich das System im Eigenzustand $|n\rangle$.

Nun werde zur Zeit $t = 0$ eine periodische Störung zugeschaltet:

$$V(t) = \Theta(t) (F e^{-i\omega t} + F^\dagger e^{i\omega t})$$

Berechnen Sie nun den Term:

$$\langle m(t) | n(t) \rangle$$

und in Analogie zur Vorlesung die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit. Interpretieren Sie die einzelnen Terme.