Repetitorium Theoretische Quantenmechanik, WS 08/09

3.1 Spin im zeitabhängigen Magnetfeld

Ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen mit magnetischem Moment $\mathbf{M} = -g\frac{e}{2m}\mathbf{S}$ befindet sich in einem zeitabhängigen Magnetfeld

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z + B_1\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + B_1\sin(\omega t)\mathbf{e}_y$$

1. Benutzen Sie die Darstellung des Spinzustandes als Linearkombination $|\chi(t)\rangle = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle$ und zeigen Sie, dass die zeitabhängigen Koeffizienten folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$i\hbar\begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \frac{g\mu_B}{2}\begin{pmatrix} B_0 & B_1e^{-i\omega t} \\ B_1e^{i\omega t} & -B_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

2. Um die Zeitentwicklung des Spins im Magnetfeld zu berechnen ist es günstig, eine Koordinatentransformation $U(t)$ durchzuführen. Wir betrachten den transformierten Spinzustand $|\eta\rangle = \alpha(t)|\uparrow\rangle + \beta(t)|\downarrow\rangle$ mit $|\eta\rangle = U(t)|\chi\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\chi\rangle = U^+(t)|\eta\rangle$. Zeigen Sie durch einsetzen von $|\chi\rangle = U^+(t)|\eta\rangle$ in die Zeitabhängige Schrödingergleichung $i\hbar\partial_t|\chi(t)\rangle = \mathcal{H}|\chi(t)\rangle$, dass für $|\eta\rangle$ folgende Gleichung gilt:

$$i\hbar\partial_t|\eta\rangle = \left[U\mathcal{H}U^+ - i\hbar U(\partial_t U^+)\right]|\eta\rangle$$

dabei ist $\mathcal{H}$ der Hamiltonoperator im ursprünglichen System.

3. Benutzen Sie die Transformation

$$U(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\omega t S_z} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \end{pmatrix}$$

sowie die Größenω_0 und ω_1 mit $\hbar\omega_0 = g\mu_B B_0$ und $\hbar\omega_1 = g\mu_B B_1$. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ (in $|\eta\rangle = \alpha(t)|\uparrow\rangle + \beta(t)|\downarrow\rangle$) folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$i\hbar\begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 - \omega & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

4. Betrachten Sie nun den Resonanzfall $\omega_0 = \omega$, bei dem die Frequenz des oszillierenden Magnetfeldes mit der freien Präzessionsfrequenz $\omega_0 = g\mu_B B_0/\hbar$ im konstanten Magnetfeld übereinstimmt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen im Eigenzustand von S_z zum Eigenwert $+\hbar/2$. Bestimmen Sie die Zeitentwicklung dieses Zustands, indem Sie die Gleichung (1) lösen. Zeigen Sie

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie daraus die Koeffizienten $a(t), b(t)$ im ursprünglichen Koordinatensystem über

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\omega t} \end{pmatrix}}_{U(t)}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

5. Berechnen Sie die Zeitentwicklung von $\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle$ und $\langle S_z \rangle$.

Lösung

1. Zeitabhängige Schrödingergleichung:

$$i\hbar\partial_t|\chi(t)\rangle = \mathcal{H}|\chi(t)\rangle$$

Es ist

$$\mathcal{H} = \frac{g\mu_B}{\hbar}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B} = \frac{g\mu_B}{\hbar}\left(B_0 S_z + B_1\cos(\omega t)S_x + B_1\sin(\omega t)S_y\right)$$

Setzen wir $|\chi(t)\rangle = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle$ in die zeitabhängige Schrödingergleichung ein, so erhalten wir

$$i\hbar\begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t)\end{pmatrix} = \frac{g\mu_B}{2}\begin{pmatrix} B_0 & B_1 e^{-i\omega t} \\ B_1 e^{i\omega t} & -B_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t)\end{pmatrix}$$

Mit den Abkürzungen $\hbar\omega_0 = g\mu_B B_0$ und $\hbar\omega_1 = g\mu_B B_1$ erhalten wir

$$i\hbar\begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t)\end{pmatrix}$$

2. Wir müssen die obige Gleichung lösen. Dies ist jedoch schwierig, da die Matrix zeitabhängig ist. Wir transformieren die Gleichung mit der angegebenen Transformation $U(t)$. Wir setzen also

$$|\eta\rangle = U(t)|\chi\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\chi\rangle = U^+(t)|\eta\rangle \qquad |\eta\rangle = \alpha(t)|\uparrow\rangle + \beta(t)|\downarrow\rangle$$

Eingesetzt in die zeitabhängige Schrödingergleichung erhalten wir:

$$i\hbar\partial_t\left(U^+(t)|\eta\rangle\right) = \mathcal{H}\left(U^+(t)|\eta\rangle\right)$$

$$U^+ i\hbar\partial_t|\eta\rangle + i\hbar(\partial_t U^+)|\eta\rangle = \mathcal{H}U^+|\eta\rangle$$

$$i\hbar\partial_t|\eta\rangle = \left[U\mathcal{H}U^+ - i\hbar U(\partial_t U^+)\right]|\eta\rangle \tag{2}$$

3. Wir verwenden nun die angegebene Koordinatentransformation

$$U(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\omega t S_z} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\omega t}\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow U^+(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\omega t}\end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} U\mathcal{H}U^+ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\omega t}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\omega t}\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\omega t}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} \omega_0 e^{-\frac{1}{2}i\omega t} & \omega_1 e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \\ \omega_1 e^{\frac{1}{2}i\omega t} & -\omega_0 e^{\frac{1}{2}i\omega t}\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 \\ \omega_1 & -\omega_0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} U(\partial_t U^+) &= \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\omega t}\end{pmatrix}\partial_t\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\omega t}\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\omega t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{i\omega}{2}e^{-\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & \frac{i\omega}{2}e^{\frac{1}{2}i\omega t}\end{pmatrix} = -\frac{i\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir erhalten mit

$$U\mathcal{H}U^+ - i\hbar U(\partial_t U^+) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0-\omega & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega_0-\omega) \end{pmatrix}$$

eine Differentialgleichung für $(\alpha(t), \beta(t))^T$:

$$i\hbar\begin{pmatrix} \dot\alpha(t) \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0-\omega & \omega_1 \\ \omega_1 & -(\omega_0-\omega) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

4. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $|\chi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$, also $a(0) = 1$, $b(0) = 0$. Somit ist der Anfangswert für die obige Differentialgleichung $|\eta(0)\rangle = U(0)|\chi(0)\rangle$, also $\alpha(0) = 1$ und $\beta(0) = 0$. Wir betrachten nun den Fall $\omega = \omega_0$ und suchen die Lösung von

$$\begin{pmatrix} \dot\alpha(t) \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix} = \underbrace{-\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \\ \omega_1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen nun die Eigenwerte der Matrix $\mathbb{A}$:

$$0 = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -i\omega_1/2 \\ -i\omega_1/2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{\omega_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\frac{i}{2}\omega_1$$

Wir bestimmen die Eigenvektoren:

$$\mathbf{v}_1 \in \text{Kern}\begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\omega_1 & -\frac{i}{2}\omega_1 \\ -\frac{i}{2}\omega_1 & -\frac{i}{2}\omega_1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 \in \text{Kern}\begin{pmatrix} \frac{i}{2}\omega_1 & -\frac{i}{2}\omega_1 \\ -\frac{i}{2}\omega_1 & \frac{i}{2}\omega_1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir stellen nun $\begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\mathbf{v}_1$und $\mathbf{v}_2$dar:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

also ist

$$\begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Die Lösung lautet somit

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{i}{2}\omega_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-\frac{i}{2}\omega_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Transformieren wir mit $|\chi\rangle = U^+(t)|\eta\rangle$ zurück, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\omega t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \\ -\sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)e^{\frac{1}{2}i\omega t} \end{pmatrix}$$

5. Wir bestimmen nun die Erwartungswerte. Mit $|\chi(t)\rangle = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle$ sind sie gegeben durch

$$\langle S_x\rangle = \hbar\mathrm{Re}(a^*b) \qquad \langle S_y\rangle = \hbar\mathrm{Im}(a^*b) \qquad \langle S_z\rangle = \frac{\hbar}{2}(|a|^2 - |b|^2|)$$

also

$$\begin{aligned}
\langle S_x\rangle &= -\hbar\mathrm{Re}\left[\cos\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)e^{i\omega t}\right] = -\frac{\hbar}{2}\sin(\omega_1 t)\cos(\omega t)\\
\langle S_y\rangle &= -\hbar\mathrm{Im}\left[\cos\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)e^{i\omega t}\right] = -\frac{\hbar}{2}\sin(\omega_1 t)\sin(\omega t)\\
\langle S_z\rangle &= \frac{\hbar}{2}\left[\cos^2\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)\right] = \frac{\hbar}{2}\cos(\omega_1 t)
\end{aligned}$$

Der Vektor des Spin-Erwartungswertes $\langle\mathbf{S}\rangle$ macht also eine Spiralförmige Bewegung.

3.2 Matrizen für Spin-$\frac{3}{2}$

Bestimmen Sie für Spin-$\frac{3}{2}$-Teilchen die Matrixdarstellung der Spinoperatoren S_x, S_y und S_z in der Basis der Eigenzustände von S_z.

Lösung

Wir kürzen die Notation für die Eigenzustände von S_z folgendermaßen ab:

$$|\alpha\rangle := \left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle, |\beta\rangle := \left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, |\gamma\rangle := \left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, |\delta\rangle := \left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$$

Ein allgemeiner Spinzustand wird angegeben durch

$$|\chi\rangle = a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle + d|\delta\rangle$$

Wobei $(a,b,c,d)^T$ der Koordinatenvektor von $|\chi\rangle$ bezüglich der Basis $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle, |\delta\rangle\}$ ist. In dieser Basis ist S_z diagonal:

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Wir bestimmen mit Hilfe der Beziehung $S_\pm|s,m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}|s,m\rangle$ die Matrixdarstellung von S_x und S_y. Dabei bestimmen wir zuerst die Matrixdarstellung von $S_\pm$. Es gilt

$$S_+|\alpha\rangle = 0 \qquad S_+|\beta\rangle = \sqrt{3}\hbar|\alpha\rangle \qquad S_+|\gamma\rangle = 2\hbar|\beta\rangle \qquad S_+|\delta\rangle = \sqrt{3}\hbar|\gamma\rangle$$

also ist die Matrix von S_+ gegeben durch

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Analog erhält man mit

$$S_-|\alpha\rangle = \sqrt{3}\hbar|\beta\rangle \qquad S_-|\beta\rangle = 2\hbar|\gamma\rangle \qquad S_-|\gamma\rangle = \sqrt{3}\hbar|\delta\rangle \qquad S_-|\delta\rangle = 0$$

die Matrixdarstellung von S_-:

$$S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir:

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) = \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Spin im Magnetfeld (DVP 2006)

Gegeben sei ein ruhendes Elektron, welches sich im normierten Eigenzustand des Operators

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$ befindet. Die Quantisierungsachse ist die z-Achse, zu welcher die zugehörigen Eigenzustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ lauten.

1. Drücken Sie den Zustand, in dem sich das Elektron befindet, durch $|\uparrow\rangle$und $|\downarrow\rangle$aus.
2. Betrachten Sie nun den Fall, dass sich das Elektron in einem konstanten Magnetfeld B befindet, welches in z-Richtung zeigt, d.h. der zugehörige Hamilton-Operator hat die Form

   $$\mathcal{H} = -\mu B S_z \qquad \text{mit} \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Die zeitliche Entwicklung des Zustandes ist gegeben durch

   $$|\chi(t)\rangle = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle$$

   Berechnen Sie die zeitabhängigen Koeffizienten $a(t)$ und $b(t)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron nach der Zeit t im Zustand $|\uparrow\rangle$ zu finden?
3. Wann befindet sich das Elektron in dem Eigenzustand mit Eigenwert $-\frac{\hbar}{2}$ bzgl. des Operators S_y (Spinflip)?

Lösung

1. Zunächst berechnen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators S_y. Diese lauten:

   $$\text{Eigenwert: } +\frac{\hbar}{2} \qquad \text{Eigenvektor: } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$$

$$\text{Eigenwert: } -\frac{\hbar}{2} \qquad \text{Eigenvektor: } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$$

Also ist der Anfangszustand des Spins in der Aufgabe

$$|\chi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$$

2. Wir lösen die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t|\chi(t)\rangle = \mathcal{H}|\chi(t)\rangle$$

mit $|\chi(t)\rangle = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle$ und $|\chi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ Wir erhalten eine Differentialgleichung in $a(t)$ und $b(t)$:

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = -\mu B\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Dies sind zwei ungekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \; i\frac{\mu B}{2}a(t) \\ \dot{b}(t) &= - \; i\frac{\mu B}{2}b(t) \end{aligned}$$

Die Lösungen sind

$$a(t) = a(0)e^{i\frac{\mu B}{2}t} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\mu B}{2}t} \qquad b(t) = b(0)e^{-i\frac{\mu B}{2}t} = \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\mu B}{2}t}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron nach der Zeit t im Zustand $|\uparrow\rangle$ zu finden ist somit

$$P(\uparrow) = |a(t)|^2 = \frac{1}{2}$$

3. Nach der letzten Teilaufgabe ist

$$|\chi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\mu B}{2}t}|\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\mu B}{2}t}|\downarrow\rangle$$

Die Spin-Flip-Zeit t_{flip} ist gegeben durch

$$|\chi(t_{flip})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\mu B}{2}t_{flip}}|\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\mu B}{2}t_{flip}}|\downarrow\rangle \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle$$

Da $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle$ der Eigenzustand von S_y zum Eigenwert $-\frac{\hbar}{2}$ ist. Ein Spin-Flip ist z.B. möglich, wenn $t_{flip} = \frac{\pi}{\mu B}$ ist.

3.4 Spin-Kopplung

Ein System aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen wird durch einen Hamiltonoperator der Form

$$\mathcal{H} = A(S_{1z} + S_{2z}) + B\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \qquad A, B = \text{const}$$

beschrieben. Bestimmen Sie alle Energieniveaus des Systems. *Hinweis: Sie müssen nicht die Eigenzustände nochmals bestimmen. Wählen Sie als Basis die gemeinsamen Eigenzustände von* $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2$, S_z, $\mathbf{S}_1^2$ *und* $\mathbf{S}_2^2$ *aus dem Beispiel aus der Vorlesung.*

Lösung

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Operatoren $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2$ und S_z folgende Eigenzustände besitzen:

$$\begin{aligned}
|S=1, M=1\rangle &= |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle \\
|S=1, M=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) \\
|S=1, M=-1\rangle &= |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle \\
|S=0, M=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)
\end{aligned}$$

Diese sind auch Eigenzustände von $\mathbf{S}_1^2$ und $\mathbf{S}_2^2$. Desweiteren gilt

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{S}^2 - \mathbf{S}_1^2 - \mathbf{S}_2^2\right)$$

Also erhalten wir

$$\mathcal{H} = A(S_{1z} + S_{2z}) + B\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = A(S_{1z} + S_{2z}) + \frac{1}{2}B\left(\mathbf{S}^2 - \mathbf{S}_1^2 - \mathbf{S}_2^2\right)$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}|S, M\rangle &= \left\{A\hbar M + \frac{B}{2}\left[\hbar^2 S(S+1) - \hbar^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \hbar^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]\right\}|S, M\rangle \\
\Rightarrow E_{S,M} &= A\hbar M + \frac{B\hbar^2}{2}\left[S(S+1) - \frac{3}{2}\right]
\end{aligned}$$

3.5 Zwei Teilchen im Potentialtopf

Betrachten Sie zwei nichtwechselwirkende Teilchen, beide mit der Masse m, in einem unendlichen hohen Potentialtopf ($V(x) = 0$ für $0 \leq x \leq a$ und ∞ sonst). Bestimmen Sie

1. die Wellenfunktion, den Energieeigenwert und die Entartung des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands, falls die Teilchen unterscheidbar sind.
2. die Wellenfunktion, den Energieeigenwert und die Entartung des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands, falls die Teilchen identische Bosonen sind.
3. die Wellenfunktion und den Energieeigenwert des Grundzustands, falls die Teilchen identische Fermionen sind.

Lösung

Wir betrachten zwei nichtwechselwirkende Teilchen, beide mit der Masse m, in einem unendlichen hohen Potentialtopf ($V(x) = 0$ für $0 \leq x \leq a$ und ∞ sonst). Die Einteilchenwellenfunktionen lauten:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad E_n = n^2 K \qquad \text{mit} \quad K := \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

1. Die Teilchen sind unterscheidbar, d.h. die Zweiteilchenwellenfunktion ist ein einfaches Produkt

   $$\psi_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) \qquad E_{n_1,n_2} = (n_1^2 + n_2^2)K$$

   Der Grundzustand ist gegeben durch

   $$\psi_{1,1} = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}x_1\right)\left(\frac{\pi}{a}x_2\right) \qquad E_{1,1} = 2K$$

   und ist nicht entartet. Der erste angeregte Zustand ist gegeben durch:

   $$\psi_{1,2} = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}x_1\right)\left(\frac{2\pi}{a}x_2\right) \qquad E_{1,2} = 5K$$

   $$\psi_{2,1} = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x_1\right)\left(\frac{\pi}{a}x_2\right) \qquad E_{2,1} = 5K$$

   Der erste angeregte Zustand ist somit zweifach entartet.

2. Die Teilchen sind identische Bosonen. Der Grundzustand ist gegenüber dem Fall mit Unterscheidbarkeit unverändert, d.h.:

   $$\psi = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}x_1\right)\left(\frac{\pi}{a}x_2\right) \qquad E = 2K$$

   Der erste angeregte Zustand ist nicht entartet und lautet

   $$\psi = \frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x_1\right)\left(\frac{2\pi}{a}x_2\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a}x_1\right)\left(\frac{\pi}{a}x_2\right)\right] \qquad E = 5K$$

3. Die Teilchen sind identische Fermionen, für die das Pauli-Prinzip gilt. Es gibt keinen Zustand mit $E = 2K$. Der Grundzustand ist

   $$\psi = \frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x_1\right)\left(\frac{2\pi}{a}x_2\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{a}x_1\right)\left(\frac{\pi}{a}x_2\right)\right] \qquad E = 5K$$