JINMING LU, KONRAD SCHÖNLEBER

Repetitorium Theoretische Quantenmechanik, WS 08/09

3.1 Spin im zeitabhängigen Magnetfeld

Ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen mit magnetischem Moment $\mathbf{M} = -g\frac{e}{2m}\mathbf{S}$ befindet sich in einem zeitabhängigen Magnetfeld

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z + B_1\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + B_1\sin(\omega t)\mathbf{e}_y$$

1. Benutzen Sie die Darstellung des Spinzustandes als Linearkombination $|\chi(t)\rangle = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle$ und zeigen Sie, dass die zeitabhängigen Koeffizienten folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$i\hbar\begin{pmatrix}\dot{a}(t)\\ \dot{b}(t)\end{pmatrix} = \frac{g\mu_B}{2}\begin{pmatrix}B_0 & B_1e^{-i\omega t}\\ B_1e^{i\omega t} & -B_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(t)\\ b(t)\end{pmatrix}$$

2. Um die Zeitentwicklung des Spins im Magnetfeld zu berechnen ist es günstig, eine Koordinatentransformation $U(t)$ durchzuführen. Wir betrachten den transformierten Spinzustand $|\eta\rangle = \alpha(t)|\uparrow\rangle + \beta(t)|\downarrow\rangle$ mit $|\eta\rangle = U(t)|\chi\rangle \quad\Leftrightarrow\quad |\chi\rangle = U^+(t)|\eta\rangle$. Zeigen Sie durch einsetzen von $|\chi\rangle = U^+(t)|\eta\rangle$ in die Zeitabhängige Schrödingergleichung $i\hbar\partial_t|\chi(t)\rangle = \mathcal{H}|\chi(t)\rangle$, dass für $|\eta\rangle$ folgende Gleichung gilt:

$$i\hbar\partial_t|\eta\rangle = \left[U\mathcal{H}U^+ - i\hbar U(\partial_t U^+)\right]|\eta\rangle$$

dabei ist $\mathcal{H}$ der Hamiltonoperator im ursprünglichen System.

3. Benutzen Sie die Transformation

$$U(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\omega t S_z} = \begin{pmatrix}e^{\frac{1}{2}i\omega t} & 0\\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\omega t}\end{pmatrix}$$

sowie die Größenω_0 und ω_1 mit $\hbar\omega_0 = g\mu_B B_0$ und $\hbar\omega_1 = g\mu_B B_1$. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ (in $|\eta\rangle = \alpha(t)|\uparrow\rangle + \beta(t)|\downarrow\rangle$) folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$i\hbar\begin{pmatrix}\dot{\alpha}(t)\\ \dot{\beta}(t)\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\omega_0-\omega & \omega_1\\ \omega_1 & -(\omega_0-\omega)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix} \tag{1}$$

4. Betrachten Sie nun den Resonanzfall $\omega_0 = \omega$, bei dem die Frequenz des oszillierenden Magnetfeldes mit der freien Präzessionsfrequenz $\omega_0 = g\mu_B B_0/\hbar$ im konstanten Magnetfeld übereinstimmt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen im Eigenzustand von S_z zum Eigenwert $+\hbar/2$. Bestimmen Sie die Zeitentwicklung dieses Zustands, indem Sie die Gleichung (1) lösen. Zeigen Sie

$$\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)\\ -\sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)\end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie daraus die Koeffizienten $a(t), b(t)$ im ursprünglichen Koordinatensystem über

$$\begin{pmatrix}a(t)\\ b(t)\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}e^{-\frac{1}{2}i\omega t} & 0\\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\omega t}\end{pmatrix}}_{U(t)}\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix}$$

5. Berechnen Sie die Zeitentwicklung von $\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle$ und $\langle S_z \rangle$.

3.2 Matrizen für Spin-$\frac{3}{2}$

Bestimmen Sie für Spin-$\frac{3}{2}$-Teilchen die Matrixdarstellung der Spinoperatoren S_x, S_y und S_z in der Basis der Eigenzustände von S_z.

3.3 Spin im Magnetfeld (DVP 2006)

Gegeben sei ein ruhendes Elektron, welches sich im normierten Eigenzustand des Operators

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$ befindet. Die Quantisierungsachse ist die z-Achse, zu welcher die zugehörigen Eigenzustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ lauten.

1. Drücken Sie den Zustand, in dem sich das Elektron befindet, durch $|\uparrow\rangle$und $|\downarrow\rangle$aus.
2. Betrachten Sie nun den Fall, dass sich das Elektron in einem konstanten Magnetfeld B befindet, welches in z-Richtung zeigt, d.h. der zugehörige Hamilton-Operator hat die Form

$$\mathcal{H} = -\mu B S_z \qquad \text{mit} \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die zeitliche Entwicklung des Zustandes ist gegeben durch

$$|\chi(t)\rangle = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle$$

Berechnen Sie die zeitabhängigen Koeffizienten $a(t)$ und $b(t)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron nach der Zeit t im Zustand $|\uparrow\rangle$ zu finden?
3. Wann befindet sich das Elektron in dem Eigenzustand mit Eigenwert $-\frac{\hbar}{2}$ bzgl. des Operators S_y (Spinflip)?

3.4 Spin-Kopplung

Ein System aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen wird durch einen Hamiltonoperator der Form

$$\mathcal{H} = A(S_{1z} + S_{2z}) + B\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \qquad A, B = \text{const}$$

beschrieben. Bestimmen Sie alle Energieniveaus des Systems. *Hinweis: Sie müssen nicht die Eigenzustände nochmals bestimmen. Wählen Sie als Basis die gemeinsamen Eigenzustände von* $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2$, S_z, $\mathbf{S}_1^2$ *und* $\mathbf{S}_2^2$ *aus dem Beispiel aus der Vorlesung.*

3.5 Zwei Teilchen im Potentialtopf

Betrachten Sie zwei nichtwechselwirkende Teilchen, beide mit der Masse m, in einem unendlichen hohen Potentialtopf ($V(x) = 0$ für $0 \leq x \leq a$ und ∞ sonst). Bestimmen Sie

1. die Wellenfunktion, den Energieeigenwert und die Entartung des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands, falls die Teilchen unterscheidbar sind.

2. die Wellenfunktion, den Energieeigenwert und die Entartung des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands, falls die Teilchen identische Bosonen sind.
3. die Wellenfunktion und den Energieeigenwert des Grundzustands, falls die Teilchen identische Fermionen sind.