JINMING LU, KONRAD SCHÖNLEBER

Repetitorium Theoretische Quantenmechanik, WS 08/09

1.1 (Freie Teilchenströme)

a) Leiten sie aus folgender Kontinuitätsgleichung einen Ausdruck für die quantenmechanische Teilchenstromdichte $j(x,t)$ (in 1d) her:

$$\partial_t P(x,t) + \partial_x j(x,t) = 0$$

b) Berechnen sie die Stromdichten der Teilchenströme, die beschrieben sind durch:

$$\Psi_1(x) = e^{ikx} \quad ; \quad \Psi_2(x) = e^{-ikx}$$

1.2 (Potentialstufe)

Ein von links einlaufender Teilchenstrom aus Teilchen der Energie E treffe auf folgendes Potential:

$$V(x) = V_0 \cdot \Theta(x)$$

a) Beschreiben Sie die Stromdichte links und rechts von der Potentialstufe im Falle

$$E \geq V_0$$

b) Folgern Sie aus der Erhaltung der Stromdichte und der stetigen Differenzierbarkeit von Ψ Formeln für Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

c) Welcher Anteil des Teilchenstromes wird bei $V_0 = \frac{E}{2}$ transmittiert?

1.3 (Potentialtopf)

Berechnen Sie für folgenden Hamiltonoprator die Eigenzustände und Eigenenergieen

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

mit $V(x) = \infty$ falls $|x| > a$ und $V(x) = 0$ falls $|x| \leq a$

1.4 (Kronig-Penney-Modell)

Das Kronig-Penney-Modell ist ein stark vereinfachtes Modell eines kristallinen Festkörpers. Dazu wird ein periodisches Potential aus lauter repulsive δ-Funktionen angenommen:

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\lambda}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0 \delta(x - na)$$

Wir werden nun mit diesem Modell schrittweise das Auftreten von "Energiebändern" in Festkörpern erklären.

a) Überlegen Sie wie sich $\Psi(x)$ und $\Psi(x+a)$ unterscheiden

b) Zeigen Sie, dass $\partial_x \Psi(x)|_{x=na}$ unstetig ist und berechnen Sie $\partial_x \Psi(x)|_{x \geq na} - \partial_x \Psi(x)|_{x \leq na}$

(Hinweis: Integrieren Sie über die 2.Ableitungen)

c) Teilen Sie die x-Achse in Bereiche zwischen δ-Peaks ein und folgern Sie aus den Ergebnissen aus a) und b), dass es Werte von k bzw. E gibt, die nicht erlaubt sind (Bandlücken).

(Hinweis: Verwenden Sie für die freien Teilchen Lösungen zwischen den δ-Peaks die reelle Schreibweise)

1.5 (Wichtige Rechenregeln für Kommutatoren)

a) Formen Sie folgende Terme so um, dass nur noch Summen von Kommutatoren mit einzelnen Operatoren vorkommen:

$$[A, BC] \quad ; \quad [\lambda A + B, C]$$

b) Zeigen Sie folgende Identitäten:

$$[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0 \quad ; \quad [A^\dagger, B^\dagger] = [B, A]^\dagger \quad ; \quad [H, A^\dagger] = -[H, A]^\dagger$$

c) Zeigen Sie, dass sich jeder Operator in eine Summe aus einem hermiteschen und einem anti-hermiteschen (d.h. $A^\dagger = -A$) Operator zerlegen lässt

1.6 (Berechnung von Kommutatoren)

a) Berechnen Sie (in 1d)

$$[x^2, p] \quad ; \quad [x, Pol(p)]$$

wobei $Pol(p)$ ein beliebiges Polynom in p ist.

b) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[A, A^\dagger] \quad , \quad [H, A] \quad , \quad [H, A^\dagger]$$

Mit den Operatoren:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} x + i \frac{p}{\sqrt{2m\omega}}$$

(Hinweis: finden Sie zunächst einen Zusammenhang zwischen H und A bzw. $A^\dagger$)