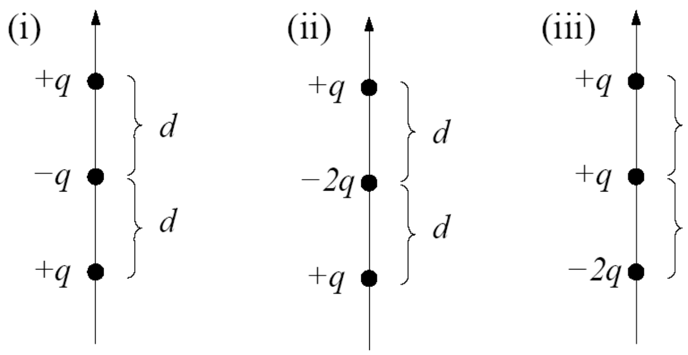
Repetitorium Theoretische Elektrodynamik, WS 07/08

1. **Multiple Choice**
Bitte kreuzen Sie die Kästchen vor den richtigen Aussagen an und lassen sie jene vor falschen Aussagen frei. Eine Frage gilt als richtig beantwortet, wenn sämtliche Kreuze richtig gesetzt sind. (Auswahl nach dem Zufallsprinzip lohnt nicht, da falsche Antworten mit negativen Punkten belegt werden! Es können bei jeder Aufgabe von 0 bis alle Aussagen richtig sein.)

a) Betrachten Sie folgende Anordnungen ruhender Ladungen im Vakuum: Geben Sie für jede Anordnung die führenden Potenzen von $r = |\vec{r}|$ an, mit denen das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ bei großem r abfällt.



(i)	☒ $\frac{1}{r}$	☐ $\frac{1}{r^2}$	☐ $\frac{1}{r^3}$
(ii)	☐ $\frac{1}{r}$	☐ $\frac{1}{r^2}$	☒ $\frac{1}{r^3}$
(ii)	☐ $\frac{1}{r}$	☒ $\frac{1}{r^2}$	☐ $\frac{1}{r^3}$

b) Das Gauß'sche Gesetz wäre ungültig wenn:

☐ es magnetische Monopole gäbe.

☒ die Kraft zwischen 2 Punktladungen nicht exakt proportional zum inversen Abstandsquadrat wäre.

☐ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum keine universelle Konstante wäre.

☒ das Potential einer Punktladung nicht exakt indirekt proportional zum Abstand wäre.

c) Sei $\vec{P}$ die Polarisation und $\vec{E}$ das elektrische Feld, dann ist in der Gleichung $\vec{P} = \alpha\vec{E}$, α im allgemeinen:

☐ ein Skalar.

☐ ein Vektor

☐ ein Tensor 3. Stufe

d) Eine Punktladung befindet sich vor einer Metallplatte, dann gilt:

☐ sie wird von der Platte abgestoßen.

☐ sie merkt nichts von der Platte.

☒ sie wird von der Platte angezogen.

e) Für statische Felder in Medien gilt immer:

☐ $\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{0}$

☒ $\vec{D} \| \vec{E}$ für isotrope Medien

☒ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$

☐ $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$

f) Die elektrische Ladung auf je zwei geladenen Partikeln wird verdoppelt. Die elektrische Kraft zwischen ihnen

☐ wird verdoppelt.

☐ bleibt gleich.

☒ wird von keiner der obigen Aussagen beschrieben.

☒ wird vervierfacht

g) Wir betrachten statische B- und E-Felder. Welche Aussage trifft zu? Das elektrische Feld:

☒ gehorcht dem Superpositionsprinzip.

☐ wird durch ein statisches B-Feld erzeugt.

☒ besitzt ein zugehöriges Potential, dessen Differenz einer Spannung entspricht.

h) Ein positiv geladenes Teilchen befindet sich in einem homogenen elektrischen und homogenen magnetischen Feld. Beide Feldrichtungen sind parallel. Weitere Felder sind nicht vorhanden. Das Teilchen wird zunächst festgehalten und dann plötzlich losgelassen. Das Teilchen bewegt sich

☐ auf einer Kreisbahn

☐ auf einer Parabel

☒ auf einer Geraden

☐ auf einer Spiralbahn, dessen Radius durch ein Kräftegleichgewicht bestimmt ist.

☐ auf einer Zykloide

i) Welche der folgende Gleichungen impliziert die Nichtexistenz von magnetischen Monopolen?

☐ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

☒ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

☐ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

☐ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

☐ magnetische Monopole wurden in letzter Zeit gefunden.

j) Folgende Übergangsbedingungen gelten für die Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$, und $\vec{H}$ an Grenzflächen mit $\sigma_{frei} \neq 0$, $\vec{k}_{frei} \neq \vec{0}$, $\sigma_{gebunden} \neq 0$ und $\vec{k}_{gebunden} \neq \vec{0}$:

☐ Die Normalkomponente von D ist stetig

☒ Die Differenz der Tangentialkomponenten von B ist mit $\vec{k}_{gebunden}$ verknüpft.

☐ Die Tangentialkomponente von H ist stetig

☒ Die Tangentialkomponente von E ist stetig

☐ Die Differenz der Normalkomponenten von E ist mit σ_{frei} verknüpft.

☒ Die Normalkomponente von B ist stetig

k) Für das Ohm'sche Gesetz $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ gilt:

☒ σ ist im allgemeinen ein Tensor 2. Stufe

☐ σ ist im allgemeinen konstant

☐ Das Ohm'sche Gesetz lässt sich aus den Maxwell-Gleichungen herleiten.

l) Für eine ebene elektromagnetische Welle mit $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right]$ gilt:

☒ für $\vec{k} = k\hat{e}_z$ ist $E_{0z} = 0$.

☒ für $E_{0x}/E_{0y} \in \mathbb{R}$ erhält man eine linear polarisierte Welle

☐ für $E_{0x}/E_{0y} \in i\mathbb{R}$ erhält man eine zirkular polarisierte Welle

☒ für $E_{0x}/E_{0y} \notin \mathbb{R} \cup \{i\}$ erhält man eine elliptisch polarisierte Welle.

m) Sei die x-y-Ebene eine Grenzfläche zwischen 2 Medien. Eine ebene Lichtwelle mit $\vec{E}_{in} = \vec{E}_i e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega t)}$, $\vec{k}_i \cdot \hat{e}_y = 0$ von Medium 1 auf die Grenzfläche, wodurch eine reflektierte Welle $\vec{E}_{refl} = \vec{E}_r e^{i(\vec{k}_r\cdot\vec{r}-\omega t)}$ in Medium 1 und eine gebrochene Welle $\vec{E}_{gebr} = \vec{E}_b e^{i(\vec{k}_b\cdot\vec{r}-\omega t)}$ in Medium 2 entstehen. Dann gilt:

☒ $\vec{k}_r \cdot \hat{e}_y = 0$ und $\vec{k}_b \cdot \hat{e}_y = 0$

☐ $\vec{k}_r \cdot \hat{e}_z = \vec{k}_i \cdot \hat{e}_z$

☒ $|\vec{k}_r| = |\vec{k}_i|$

☐ $|\vec{k}_b|/|\vec{k}_i| = n_1/n_2$, wobei $n_{1,2}$ die Brechungsindizes der Medien 1 und 2 sind.

☐ Ist $\vec{E}_i$ parallel zur Grenzfläche, so existiert ein Einfallswinkel $\alpha_{Brewster}$, bei dem $\vec{E}_r = E_r\hat{e}_y$ gilt.

n) Für die Dielektrizitätskonstante ε gilt:

☒ Sie ist im allgemeinen nicht frequenzunabhängig.

☒ Sie ist im allgemeinen komplex.

☒ Der Imaginärteil von $\sqrt{\varepsilon}$ führt zur Absorption der Welle.

o) Wir betrachten die Potentiale $\vec{A}$ und Φ im zeitabhängigen Fall:

☐ Die Felder lassen sich durch $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ berechnen.

☒ Sei f eine skalare Funktion, dann führt $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla} f$ und $\Phi \to \Phi - \partial_t f$ zu den gleichen physikalischen Feldern.

☒ Es exisitiert ein f (siehe oben), sodass $c_0^2 \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\partial_t \Phi$.

☐ Für die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ erfüllen die Potentiale $\vec{A}$ und Φ die inhomogene Wellengleichung.

p) Die elektrischen Felder des statischen und des schwingenden Dipols:

☐ Fallen bei großen Entfernungen r ab wie $\frac{1}{r}$

☐ Fallen bei großen Entfernungen r ab wie $\frac{1}{r^2}$

☐ Fallen bei großen Entfernungen r ab wie $\frac{1}{r^3}$

q) Invariant gegenüber der Lorentz-Transformation sind:

☐ Der Feldstärkentensor $F^{\mu\nu}$

☐ Die Komponenten des Vierer-Potentials A_μ

☐ Der Laplace-Operator Δ

☒ Der Operator $\Delta - c_0^{-2}\partial_t^2$

☒ Das Produkt $\vec{E}\cdot\vec{B}$

☒ $\vec{E}^2 - c_0^2\vec{B}^2$

☒ Die Phase einer elektromagnetischen Welle $\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}$

r) Folgende Aussagen bezüglich Transformationsverhalten sind richtig:

☒ Der Ortsvektor $\vec{r}$ bildet den Ortsanteil eines Vierervektors.

☐ Das elektrische Feld $\vec{E}$ bildet den Ortsanteil eines Vierervektors.

☐ Die Geschwindigkeit $(v^\mu) = (c_0, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$ wird wie ein Vierervektor transformiert.

☐ Der Impuls $(m_0 v^\mu)$ wird wie ein Vierervektor transformiert.

s) Das Bezugssystem $K\,'$ bewegt sich mit Geschwindigkeit v in x-Richtung relativ zu K. Dann gilt:

☒ Die Komponente des elektrischen Feldes parallel zur Bewegungsrichtung ist in beiden Bezugssystemen gleich.

☐ Die Komponente des magnetischen Feldes normal zur Bewegungsrichtung ist in beiden Bezugssystemen gleich.

t) Sei $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ und $\vec{E}^2 < c_0^2\vec{B}^2$ in einem Inertialsystem K. Dann gilt

☒ Es existiert ein Inertialsystem K' in dem $\vec{E}' = \vec{0}$ ist.

☐ Es existiert ein Inertialsystem K' in dem $\vec{B}' = \vec{0}$ ist.

☒ Es existiert ein Inertialsystem K' in dem $\vec{B}'_\perp = \vec{B}'$ ist.

☒ Es existiert ein Inertialsystem K' in dem $\vec{B}'_\parallel = \vec{0}$ ist.

2. **Kurze Aufgaben**

a) Geben Sie zum Magnetfeld

$$\vec{B}(x,y,z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

eines unendlich langen, mit konstantem Strom I durchflossenen, geradlinigen Leiters entlang der z-Achse ein Vektorpotential $\vec{A}$ an.

Lösung. *Wir berechnen das Vektorpotential in kartesischen Koordinaten. Es muss gelten*

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

Wir wählen $A_x = A_y = 0$. Dann muss gelten:

$$\partial_y A_z = B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\ln\left(x^2+y^2\right) + f(x)\right)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = -\partial_x A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{x}{x^2+y^2} + 2f'(x)\right] \;\Rightarrow\; f(x) = const$$

Wir erhalten

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{R}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{e}_z, \qquad R > 0$$

b) Berechnen Sie Monopolmoment Q, das Dipolmoment $\vec{p}$ und den spurlosen Quadrupoltensor Q_{ij} in kartesischer Darstellung der folgenden Ladungsanordnungen:

i. Auf der x-Achse befinden sich die Punktladungen $q > 0$ bei $x = +a$ bzw. $x = -a$, und auf der y-Achse befinden sich die Punktladungen $-q$ bei $y = +a$ und $y = -a$.

Lösung. *Die Ladungsdichte wird beschrieben durch*

$$\rho(\vec{r}) = q\delta\left(\vec{r}-(a,0,0)^T\right)+q\delta\left(\vec{r}-(-a,0,0)^T\right)-q\delta\left(\vec{r}-(0,a,0)^T\right)-q\delta\left(\vec{r}-(0,-a,0)^T\right)$$

Monopolmoment:

$$Q = \int \rho(\vec{r})d^3r = \sum_{i=1}^{4} q_i = 0$$

Dipolmoment:

$$\vec{p} = \int \vec{r}\rho(\vec{r})d^3r = q\begin{pmatrix} a+(-a) \\ -a+a \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Quadrupoltensor:

$$Q_{ij} = \frac{1}{3}\int \rho(\vec{r})(3r_ir_j - \delta_{ij}|\vec{r}|^2)d^3r$$

Da Ladungen auf den Koordinatenachsen liegen, kommt im Term $3r_ir_j$ für $i \neq j$ immer die Zahl 0 vor. Daher sind alle Nichtdiagonalelemente 0. Wir berechnen Q_{xx}:

$$Q_{xx} = \frac{1}{3}\int \rho(\vec{r})(2x^2-y^2-z^2)dxdydz = \frac{1}{3}[2a^2q+2(-a)^2q-a^2(-q)-(-a)^2(-q)] = 2qa^2$$

Dann berechnen wir

$$Q_{zz} = \frac{1}{3}\int \rho(\vec{r})(2z^2-x^2-y^2)dxdydz = \frac{1}{3}[q(-a^2-(-a)^2)+(-q)(-a^2-(-a)^2)] = 0$$

Wegen $tr(\mathbf{Q}) = 0$ schließen wir, dass $Q_{yy} = -2qa^2$ sein muss. Also erhalten wir insgesamt:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2qa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii. Eine Punktladung $q > 0$ befinde sich bei $\vec{r} = \vec{0}$ Die Ladung $-q$ sei gleichmäßig auf einem Kreis mit Radius a und Zentrum im Ursprung in der x-y-Ebene verteilt.
Lösung. *Die Gesamtladung ist offensichtlich 0. Das Dipolmoment verschwindet wegen Symmetrie. Die Ladungsdichte ist gegeben durch:*

$$\rho(\vec{r}) = \delta(z)\left[q\delta(x,y) - \frac{q}{\pi a^2}\theta\left(a-\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]$$

wobei θ die Heaviside'sche Stufenfunktion ist. Wir nun die Komponenten des Quadrupoltensors: die Nichtdiagonalelemente Q_{xz} und Q_{yz} verschwinden aufgrund von $\delta(z)$ und $\ldots z$ unter dem Integral.

$$Q_{xy} = \int xy\delta(z)\left[q\delta(x,y) - \frac{q}{\pi a^2}\theta\left(a-\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dxdydz = 0 - \frac{q}{\pi a^2}\int\limits_{x^2+y^2\le a^2} xydxdy =$$

$$= -\frac{q}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a r\cos(\varphi)r\sin(\varphi)rdrd\varphi = -\frac{q}{\pi a^2}\left(\int_0^a r^3dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin(2\varphi)d\varphi\right) = 0$$

Wir berechnen das Diagonalelement Q_{zz}:

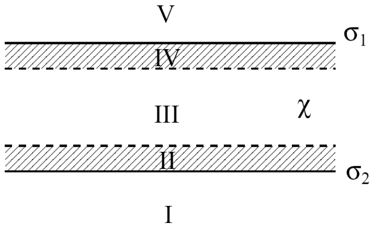
$$Q_{zz} = \frac{1}{3}\int (2z^2-x^2-y^2)\delta(z)\left[q\delta(x,y) - \frac{q}{\pi a^2}\theta\left(a-\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dxdydz =$$

$$= 0 + \frac{1}{3}\frac{q}{\pi a^2}\int\limits_{x^2+y^2\leq a^2}(x^2+y^2)dxdy = \frac{1}{3}\frac{q}{\pi a^2}2\pi\int_0^a r^3dr = \frac{1}{3}\frac{qa^2}{2}$$

Wegen Symmetrie muss $Q_{xx} = Q_{yy}$ gelten. Mit $tr(\mathbf{Q}) = 0$ erhalten wir

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{Q_{zz}}{2} = -\frac{1}{3}\frac{qa^2}{4} \Rightarrow \mathbf{Q} = \frac{qa^2}{12}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) 2 unendlich große, dünne, leitende Platten tragen die konstante Oberflächenladung $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$. In der straffierten Region befindet sich dielektrisches Material mit konstanter elektrischer Suszeptibilität χ (siehe Skizze). Berechnen Sie



i. die elektrische Verschiebung $\vec{D}$ in jeder der 5 Regionen.

ii. das elektrische Feld $\vec{E}$ in jeder der 5 Regionen.

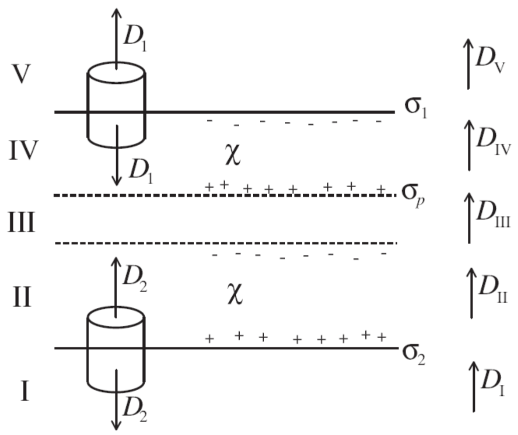
iii. die Lage und Größe der induzierten Polarisationsladungen.

Lösung.

(i) Wir berechnen die durch eine einzelne Platte erzeugte dielektrische Verschiebung. Mit dem Gauß'schen Satz erhalten wir für die zylindrische Referenzfläche mit der Deckfläche A (Skizze):

$$2AD_1 = \sigma_1 A \Rightarrow D_1 = \sigma_1/2 = \sigma/2$$

Analog erhält man $D = -\sigma/2$. Daraus folgt für die dielektrische Verschiebung in den 5 Regionen nach dem Superpositionsprinzip. Für die Außenbereiche: $D_I = D_1 + D_2 = 0$, $D_V = -D_1 - D_2 = 0$. Für die Innenbereiche gilt aufgrund der Stetigkeit der Normalkomponente von D: $D_{II} = D_{III} = D_{IV} = -D_1 + D_2 = -\sigma$.



(ii) Für das elektrische Feld gilt $\vec{E} = \vec{D}/[\varepsilon_0(1+\chi)]$ und somit erhalten wir $E_I = E_V = 0$, $E_{III} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0}$ und $E_{II} = E_{IV} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0(1+\chi)}$.

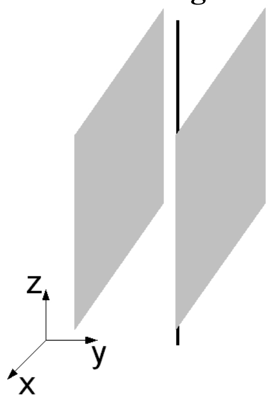
Die Lage der Polarisationsladungen ist in der Skizze dargestellt. Für die Polarisation gilt:

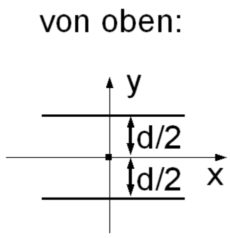
$$\vec{P}_{IV} = \vec{P}_{II} = \vec{D}_{II} - \varepsilon_0\vec{E}_{II} = \left[-\sigma + \frac{\sigma}{1+\chi}\right]\hat{e}_z = -\frac{\chi}{1+\chi}\sigma\hat{e}_z$$

Also gilt für den Betrag der Polarisationsladungsdichte:

$$\sigma_p = \chi/(1+\chi)\sigma$$

3. **Influenzladungen**





Ein unendlich langer, homogen geladener Draht entlang z-Richtung mit (Linien-) Ladungsdichte λ befinde sich in der Mitte zwischen zwei parallelen, leitenden, geerdeten Platten, die im Abstand d voneinander entfernt parallel zur x-z Ebene liegen.

a) Bestimmen Sie zuerst einen Ausdruck für das elektrische Potential eines homogen geladenen Drahtes entlang z-Richtung mit (Linien-) Ladungsdichte λ im freien Raum.
Lösung. *Wir berechnen zuerst das elektrische Feld mit dem Gauß'schen Satz: Sei* $V = \{(x,y,z);\ x^2+y^2 \leq r,\ 0 \leq z \leq L\}$ *das Referenzvolumen:*

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{\omega} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E(r) = \frac{Q/L}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad \vec{E}(x,y,z) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{\nabla}\Phi$$

Durch Integration erhält man dann

$$\Phi(x,y,z) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln(x^2+y^2) + (\Phi_0) = -\Phi(x,y,z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[C\left(x^2+y^2\right)\right]$$

b) Betrachten Sie nun das gegebene Problem und bestimmen Sie das Potential im Bereich zwischen den Platten. Skizzieren Sie die Lage der Spiegelladungen.
Lösung. *Die Lösung des gegebenen Problems erhalten wir durch Einführung von Spiegeldrähten mit der Linienladungsdichte* $(-1)^n\lambda$ *an den Stellen* $x = 0,\ y = nd \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. *Das gesuchte Potential ist somit gegeben durch eine Superposition der vom realen Draht und den Spiegeldrähten erzeugten Potentialen:*

$$\Phi(x,y,z) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \ln\left[C\left(x^2+(y-nd)^2\right)\right]$$

Wegen

$$\Phi\left(x,\frac{d}{2},z\right) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \ln\left[C\left(x^2+(\frac{d}{2}-nd)^2\right)\right] =$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{(-1)^k \ln\left[Cx^2 + C\left(\frac{2k-1}{2}d\right)^2\right] + (-1)^{k-1} \ln\left[Cx^2 + C\left(\frac{2k-1}{2}d\right)^2\right]\right\} = 0$$

und analog $\Phi(x,-\frac{d}{2},z) = 0$ *erfüllt* Φ *die Randbedingung* $\Phi(x,\pm\frac{d}{2},z) = 0$.

c) Bestimmen Sie die auf der Platte $y = d/2$ induzierte Oberflächenladungsdichte $\sigma = \sigma(x,z)$.
Lösung. *Die induzierte Oberflächenladungsdichte auf der Platte bei* $y = d/2$ *ist gegeben durch:*

$$\sigma(x,z) = \varepsilon_0 \vec{E}\,(x, d/2, z) \cdot (0,-1,0)^T = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=\frac{d}{2}} (-1) =$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{d}{2}-nd}{x^2+\left(\frac{d}{2}-nd\right)^2} = -\frac{\lambda}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)d}{x^2+\left(\frac{2k+1}{2}d\right)^2}$$

[Man erkennt insbesondere, dass für $x = 0$, gilt

$$\sigma(0, z) = -\frac{2\lambda}{\pi d}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = -\frac{\lambda}{2d}$$

d.h., die Influenzladungsdichte ist negativ, was zu erwarten ist.]

4. **Elektromagnetische Wellen**
Eine linear polarisierte ebene Welle propagiert in z-Richtung und fällt bei $z = 0$ auf eine ideal reflektierende Wand (z.B. einen idealen Leiter, $\varepsilon, \mu \to \infty$) in der x-y-Ebene

$$\vec{E}_{in}(\vec{r}, t) = \vec{E}_i e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},\ z < 0$$

   a) Welche Stetigkeitsbedingungen müssen an der Grenzfläche erfüllt werden?
   Lösung. *Wir bezeichnen mit dem Index n die Normal- und t die Tangentialkomponente des jeweiligen Feldes. Es muss gelten:*

$$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2} \qquad \vec{H}_{t1} = \vec{H}_{t2}$$

$$\vec{B}_{n1} = \vec{B}_{n2} \qquad \vec{D}_{n1} = \vec{D}_{n2}$$

   b) Welcher Vorfaktor $\vec{E}_r$ in der reflektierten Welle $\vec{E}_{refl}(\vec{r}, t) = \vec{E}_r e^{i(-\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, $z < 0$, garantiert die Erfüllung der einschlägigen Stetigkeitsbedingungen?
   Lösung. *Da die Welle sich in z-Richtung ausbreitet, ist sie parallel zur $z = 0$ Ebene polarisiert. Wegen $\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}$ muss an der Grenzfläche gelten*

$$\vec{E}_t|_{z=0} = \vec{0} = \vec{E}_i + \vec{E}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_r = -\vec{E}_i$$

   c) Welcher Druck entsteht im Mittel durch die Reflexion der Welle an der Fläche?
   Lösung. *Wegen*

$$\textit{Druck} = \frac{\textit{Kraft}}{\textit{Fläche}} = \frac{\textit{Impulsübertrag}}{\textit{Fläche}\cdot\textit{Zeit}} = 2c\langle\textit{Impulsdichte}\rangle$$

$$p = 2c\langle|\vec{D}\times\vec{B}|\rangle = 2c\varepsilon_0\langle|\vec{E}\times\vec{B}|\rangle$$

   wegen

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \ \Rightarrow\ \vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$$

$$p = 2c\varepsilon_0\frac{1}{\omega}\langle|\vec{E}\times(\vec{k}\times\vec{E})|\rangle = \frac{2ck\varepsilon_0}{\omega}\underbrace{\langle|\vec{E}(t)|^2\rangle}_{=1/2} = \varepsilon_0 E_i^2$$

5. **Relativistik**

   a) Drücken Sie die folgenden Beziehungen so durch Vierer-Vektoren aus, dass ihre Lorentz-Invarianz deutlich sichtbar ist: Lorentz-Eichung der Potentiale, Dispersionsrelation, Kontinuitätsgleichung, Wellengleichung, Phaseninvarianz einer ebenen Welle.
   Lösung.
   Lorenz Eichung: $\partial^\mu A_\mu = c_0^{-2}\partial_t\Phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$
   Dispersionsrelation: $k^\mu k_\mu = c_0^{-2}\omega^2 - |\vec{k}|^2 = 0$
   Kontinuitätsgleichung: $\partial^\mu j_\mu = \partial_t\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$
   Wellengleichung: $\partial^\mu\partial_\mu A_\nu = \left(c_0^{-2}\partial_t^2 - \Delta\right)A_\nu = \mu_0 j_\nu$
   Phaseninvarianz: $k^\mu x_\mu = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = const$

b) Eine linear polarisierte ebene Welle propagiert im Bezugsystem K in z-Richtung:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \quad \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta > 0$$

Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r},t)$.
Lösung. *Wir setzen an:*

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Aus der 3. Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ folgt

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{B}_0 = -\frac{k\eta}{\omega}\hat{e}_x$$

c) Das Bezugsystem K' stimmt bei $t = t' = 0$ mit K überein und bewegt sich relativ zu K ohne Drehung mit Geschwindigkeit v in x-Richtung. In K' hat die ebene Welle die Form $\vec{E}'(\vec{r}',t') = \vec{E}_0' e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}'-\omega' t')}$, und das zugehörige Magnetfeld ist $\vec{B}'(\vec{r}',t') = \vec{B}_0' e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}'-\omega' t')}$

i. Berechnen Sie die Frequenz ω' in K'.

ii. Berechnen Sie den Wellenvektor $\vec{k}'$ der ebenen Welle in K'.
Lösung.

$$\begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega/c_0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_0' \\ k_1' \\ k_2' \\ k_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c_0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\omega/c_0 \\ -\gamma\beta\omega/c_0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

iii. Berechnen Sie die Vorfaktoren $\vec{E}_0'$ und $\vec{B}_0'$ in K'.
Lösung. *Aus den Transformationsgleichungen für Felder folgt:*

$$\begin{array}{rcl} E_{0x}' = E_{0x} = 0 & \qquad & B_{0x}' = B_{0x} = -\frac{k\eta}{\omega} \\ E_{0y}' = \gamma(E_{0y} - vB_{0z}) = \gamma\eta & & B_{0y}' = \gamma(B_{0y} + v/c_0^2 E_{0z}) = 0 \\ E_{0z}' = \gamma(E_{0z} + vB_{0y}) = 0 & & B_{0z}' = \gamma(B_{0z} - v/c_0^2 E_{0y}) = -\frac{\gamma\beta\eta}{c_0} \end{array}$$

iv. Rechnen Sie explizit nach, dass $\vec{k}'$, $\vec{E}_0'$ und $\vec{B}_0'$ paarweise orthogonal sind.
Lösung. *Man führe die Skalarprodukte aus*

$$\vec{k}' = \begin{pmatrix} -\gamma\beta\omega/c_0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \quad \vec{E}_0' = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma\eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B}_0' = \begin{pmatrix} -\frac{k\eta}{\omega} \\ 0 \\ -\frac{\gamma\beta\eta}{c_0} \end{pmatrix}$$

d) In einem Bezugssystem herrsche ein statisches, homogenes elektrisches Feld $\vec{E}$ parallel zur z-Achse sowie ein statisches, homogenes Induktionsfeld $|\vec{B}| = 2|\vec{E}|/c_0$, das in der y-z Ebene liegt und mit der z-Achse den Winkel θ bildet.

i. Berechnen Sie das elektrische und das magnetische Feld in einem Bezugssystem K', das sich in x-Richtung mit Geschwindigkeit v bewegt.
Lösung. *Laut Angabe gilt:*

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B\sin\theta \\ B\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{2E}{c_0}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Aus den Transformationsgleichungen folgt:
$E'_1 = E_1 = 0$
$E'_2 = \gamma(E_2 - c_0\beta B_3) = -\gamma c_0 \beta B_3 = -2\gamma\beta B\cos\theta$
$E'_3 = \gamma(E_3 + c_0\beta B_2) = \gamma E(1 + 2\beta\sin\theta)$
$B'_1 = B_1 = 0$
$B'_2 = \gamma(B_2 + (\beta/c_0)E_3) = (\gamma/c_0)E(2\sin\theta + \beta)$
$B'_3 = \gamma(B_3 - (\beta/c_0)E_2) = 2(\gamma/c_0)E\cos\theta$

ii. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v des Bezugssystems K', in dem die elektrischen und magnetischen Felder zueinander parallel sind.
Lösung. *Wir betrachten die Parallelitätsbedingung:*

$$\vec{E}' \| \vec{B}' \;\Leftrightarrow\; \frac{E'_2}{B'_2} = \frac{E'_3}{B'_3} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{-2\gamma\beta E\cos\theta}{(\gamma/c_0)E(2\sin\theta+\beta)} = \frac{\gamma E(1+2\beta\sin\theta)}{2(\gamma/c_0)E\cos\theta} \;\Leftrightarrow\; \frac{-2\beta\cos\theta}{2\sin\theta+\beta} = \frac{1+2\beta\sin\theta}{2\cos\theta}$$

Daraus erhalten wir eine Gleichung:

$$2\sin\theta\beta^2 + 5\beta + 2\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow\; \beta = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16\sin^2\theta}}{4\sin\theta} = \frac{4\sin\theta}{-5 \mp \sqrt{25 - 16\sin^2\theta}}$$

Da für $\theta = 0$ auch $\beta = 0$ gelten muss, erhalten wir als sinnvolle Lösung jene mit dem oberen Vorzeichen:

$$v = c\frac{\sqrt{25 - 16\sin^2\theta} - 5}{4\sin\theta}$$

Nützliche Formeln

- Lorentz-Transformation (K' bewegt sich in x-Richtung)

$$\begin{pmatrix} c_0 t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{c} \beta = v/c_0 \\ \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \end{array} \right.$$

- Transformation der Felder (K' bewegt sich in x-Richtung)

$$\begin{array}{cc} E'_1 = E_1 & B'_1 = B_1 \\ E'_2 = \gamma(E_2 - c_0\beta B_3) & B'_2 = \gamma(B_2 + (\beta/c_0)E_3) \\ E'_3 = \gamma(E_3 + c_0\beta B_2) & B'_3 = \gamma(B_3 - (\beta/c_0)E_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \vec{E}'_{\|} = \vec{E}_{\|} & \vec{E}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{E}_{\perp} + c_0\vec{\beta}\times\vec{B}\right) \\ \vec{B}'_{\|} = \vec{B}_{\|} & \vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - c_0^{-1}\vec{\beta}\times\vec{E}\right) \end{array}$$

- Integral

$$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(a^2+x^2\right) + C$$