Matthias Danner **Blatt 4**

Ferienkurs Elektrodynamik - WS 08/09

1 Zwei Zylinder

Auf zwei konzentrischen Zylinderschalen mit den Radien a bzw. b (wobei $a < b$), fließt die Oberflächenladung $+\sigma$ bzw. $-\sigma$. Berechnen Sie das elektrische und magnetische Feld zwischen den Zylindern und bestimmen Sie damit anschließend den POYNTING-Vektor sowie die Feldenergie pro Längeneinheit.

Lösung

Das elektrische Feld lässt sich mit dem Satz von GAUSS berechnen, wobei als Volumen ein Zylinder mit Radius $r \in]a; b[$ und Höhe H gewählt wird.

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} \;=\; 2\pi r H E_r \;=\; \frac{Q_V}{\varepsilon_0} \;=\; 2\pi a H \sigma/\varepsilon_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{E} \;=\; \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}\, \boldsymbol{e}_r$$

Das Magnetfeld erhält man nach AMPERE, folgendermaßen:

$$\int_{\partial A} d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{B} \;=\; 2\pi r\, B_\phi \;=\; \mu_0 \dot{Q}_A \;=\; \mu_0\, 2\pi a \sigma v \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{B} \;=\; \frac{\mu_0\, \sigma a v}{r}\, \boldsymbol{e}_\phi$$

Damit kann man jetzt $\boldsymbol{S}$ berechnen.

$$\boldsymbol{S} \;=\; \frac{1}{\mu_0}\, \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{B} \;=\; \frac{v}{\varepsilon_0}\, (\frac{\sigma a}{r})^2\, \boldsymbol{e}_z$$

Für die Energie pro Längeneinheit benötigt man zunächst die Energiedichte.

$$\begin{aligned} w \;&=\; \frac{\varepsilon_0}{2}\, (\boldsymbol{E}^2 + c^2 \boldsymbol{B}^2) \\ &=\; \frac{\varepsilon_0}{2}\, (\frac{\sigma a}{r})^2\, (\frac{1}{\varepsilon_0^2} + c^2 \mu_0^2 v^2) \\ &=\; \frac{1}{2\varepsilon_0}\, (\frac{\sigma a}{r})^2\, (1 + \beta^2) \end{aligned}$$

Diese integriert man jetzt über den Zwischenraum:

$$\begin{aligned} E_H \;&=\; \frac{1}{2\varepsilon_0}\, (\sigma a)^2\, (1 + \beta^2)\, \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &=\; \frac{\pi}{\varepsilon_0}\, (\sigma a)^2\, (1 + \beta^2)\, \log \frac{b}{a} \cdot H \end{aligned}$$

Durch Division durch H erhält man schließlich die gewünschte Größe.

2 Relativistische Bewegung im elektrischen Feld

Eine Punktladung befinde sich in einem reinen, unendlich ausgedehnten, konstanten elektrischen Feld $\boldsymbol{E} = E\, \boldsymbol{e}_x$. Berechnen Sie $\boldsymbol{v}(t)$ mithilfe des relativistischen Kraftgesetzes und bestimmen Sie den nicht-relativistischen Grenzfall.

Lösung

Die relativistische Bewegungsgleichung lautet:

$$m\,\frac{du^\mu}{d\tau} \;=\; q\,F^{\mu\nu}\,u_\nu\,, \qquad (F^{\mu\nu}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei wurde die übliche, eher unsaubere Schreibweise für $F^{\mu\nu}$ verwendet (keine Matrix). Es gilt:

$$\frac{d}{d\tau} \;=\; \gamma\,\frac{d}{dt}\,, \qquad u^\mu \;=\; \gamma\,(c\,,\,\boldsymbol{v})$$

Damit ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\,\gamma \begin{pmatrix} c \\ v_x \end{pmatrix} \;=\; \frac{q}{mc} \begin{pmatrix} 0 & -E_x \\ E_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -v_x \end{pmatrix}$$

Mit $E \equiv E_x$ und $v \equiv v_x$ lauten die beiden Gleichungen wiefolgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,\gamma \;&=\; \frac{qE}{m}\,\frac{v}{c^2} \\ \frac{d}{dt}\,\gamma\,v \;&=\; \underbrace{\frac{qE}{m}}_{=:\,\alpha} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\gamma\,v)(t) \;=\; \alpha\,t \;+\; \text{const.} \end{aligned}$$

Wegen der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ verschwindet die Integrationskonstante.

$$\begin{aligned} (\gamma\,v)(t) \;&=\; \alpha\,t \\ v^2 \;&=\; (1 - \frac{v^2}{c^2})\,\alpha^2 t^2 \\ v^2\,(1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}) \;&=\; \alpha^2 t^2 \\ v \;&=\; \frac{\alpha\,t}{\sqrt{1 + \alpha^2\,t^2/c^2}} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) \;=\; c\,, \qquad \lim_{c\to\infty} v(t) \;=\; \alpha\,t \;=\; \frac{qE}{m}\,t$$

Dabei entspricht der zweite Grenzwert dem klassischen Grenzfall.

3 System von Differentialgleichungen

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Randbedingungen. Welche Form hat die Kurve, deren Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ ist?

$$\dot{\boldsymbol{v}} \;=\; \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{F}\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) \;=\; \boldsymbol{v}_0\,, \quad \boldsymbol{F} \;=\; (0,\,0,\,1)$$

Lösung

$$\dot{\boldsymbol{v}} \;=\; \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, bleibt v_z konstant. Es genügt also, nur die x-y-Ebene zu betrachten (Formal zerfällt die Matrix in eine direkte Summe).

$$\dot{\boldsymbol{v}} \;=\; \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\,A} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Die Lösung lautet daher:

$$\boldsymbol{v}(t) \;=\; e^{tA}\,\boldsymbol{v}_0 \;=\; e^{tS\Lambda S^{-1}}\,\boldsymbol{v}_0 \;=\; S\,e^{t\Lambda}\,S^{-1}\,\boldsymbol{v}_0 \;=\; S\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t},\, e^{\lambda_2 t})\,S^{-1}\,\boldsymbol{v}_0$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_{1/2} = \mp i$, woraus unmittelbar die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1 \propto (i,\, 1)$ und $\boldsymbol{v}_2 \propto (1,\, i)$ folgen. Damit erhält man die Transformationsmatrix S sowie ihre Inverse S^{-1}:

$$S \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} \;=\; S^{\dagger} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Der Ausdruck für $\boldsymbol{v}(t)$ lautet dann:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) \;&=\; S\,\mathrm{diag}(e^{-it},\, e^{it})\,S^{-1}\,\boldsymbol{v}_0 \\
&=\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\
&=\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\,e^{-it} & e^{-it} \\ e^{it} & -i\,e^{it} \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\
&=\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-it} + e^{it} & i\,e^{-it} - i\,e^{it} \\ -i\,e^{-it} + i\,e^{it} & e^{-it} + e^{it} \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\
&=\; \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_0
\end{aligned}$$

Der Vektor $\boldsymbol{v}(t)$ rotiert um die z-Achse und beschreibt damit einen Kreis. Interpretiert man ihn als Geschwindigkeitsvektor mit $v_z = \mathit{const.} \neq 0$, so beschreibt er die Geschwindigkeit eines Teilchens, das sich auf einer spiralförmigen Bahn in z-Richtung bewegt.

4 Green-Funktion

Berechnen Sie mittels Fourier-Transformation die Green-Funktion $G(\boldsymbol{x})$ des Laplace-Operators. Geben Sie damit die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung für eine Punktladung q, die sich am Ort $\boldsymbol{x}_0$ befindet, an.

$$\Delta\,\Phi(\boldsymbol{x}) \;=\; -\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}$$

Lösung

Die Fourier-Integrale lauten:

$$f(\boldsymbol{k}) \;=\; \int d^3x\; e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\; f(\boldsymbol{x})$$

$$f(\boldsymbol{x}) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\; f(\boldsymbol{k})$$

Fouriertransformation der Bestimmungsgleichung liefert:

$$-\boldsymbol{k}^2\; G(\boldsymbol{k}) \;=\; 1 \quad\Longleftrightarrow\quad G(\boldsymbol{k}) \;=\; -\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}$$

Die gesuchte Funktion $G(\boldsymbol{x})$ erhält man schließlich durch Rücktransformation

$$
\begin{aligned}
G(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{FT}^{-1}\, G(\boldsymbol{k}) \\
&= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{k}^2} \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty dk \int_{-1}^{1} d\cos\theta\; e^{ikx\cos\theta} \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty dk\, \frac{1}{ikx}\,(e^{ikx}-e^{-ikx}) \\
&= -\frac{1}{2\pi^2}\,\frac{1}{x}\underbrace{\int_0^\infty dk\,\frac{\sin kx}{k}}_{=\pi/2\,\cdot\,\mathrm{sgn}\,x} \\
&= -\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Um das Integral in der zweiten Zeile ausführen zu können, wurde die Basis des $\boldsymbol{k}$-Raums so gewählt, dass $k_3 \parallel \boldsymbol{x}$ ist. Außerdem wurde für das θ-Integral der übliche „Kosinus-Trick“ verwendet.

Mit der Ladungsdichte

$$\rho(\boldsymbol{x}) = q\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

lautet die Inhomogenität der Gleichung

$$g(\boldsymbol{x}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

Faltung führt schließlich zur partikulären Lösung:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{part}(\boldsymbol{x}) &= \int d^3x'\; G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,g(\boldsymbol{x}') \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\,\frac{q}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|}\,\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_0) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}
\end{aligned}
$$

Da man im Unendlichen üblicherweise $\Phi \equiv 0$ wählt, gilt für die homogene Lösung $\Phi_{hom} \equiv 0$. Den homogenen Teil der Lösung kann man also mittels Randbedingungen „wegdiskutieren“ und man erhält:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \Phi_{part}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}$$