Korbinian Münster (korbinian_muenster@ph.tum.de) **Blatt 3**

Ferienkurs Elektrodynamik - WS 08/09

1 Das klassische, strahlende Wasserstoff-Atom

Eine Punktladung q umkreist mit Radius R und konstanter Winkelgeschwindigkeit eine zweite Punktladung $-q$. Die Bewegung der Punktladung q sei im mathematischen Sinne in der xy-Ebene und die Punktladung $-q$ befinde sich im Ursprung.
Berechnen sie mit Hilfe der Näherungsformel für die Fernzone das zeitabhängige Vektorpotential $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$
Hinweis:

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{x}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d^3x\Big(\mathbf{j}\big(t-\frac{r}{c},\mathbf{x}'\big)+\frac{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}}{cr}\partial_t\mathbf{j}\big(t-\frac{r}{c},\mathbf{x}'\big)\Big)$$

Lösungsvorschlag:

Die Bahn, die die kreisende Ladung beschreibt ist:

$$\gamma(t) = R\begin{pmatrix}\sin(\omega t)\\ \cos(\omega t)\\ 0\end{pmatrix} = R\mathbf{e}_{r,t} \tag{1}$$

$$\dot\gamma(t) = R\omega\begin{pmatrix}\sin(-\omega t)\\ \cos(\omega t)\\ 0\end{pmatrix} = R\omega\mathbf{e}_{\varphi,t} \tag{2}$$

$$\ddot\gamma(t) = -R\omega^2\mathbf{e}_{r,t} \tag{3}$$

Für die Stromdichte gilt:

$$\mathbf{j}(t,\mathbf{x}) = q\dot\gamma(t)\delta(\mathbf{x}-\gamma(t)) \tag{4}$$

Mit der angegebenen Formel und $t_r = t - \frac{r}{c}$ ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(t,\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r}\int d^3x'\Big(\delta(\mathbf{x}-\gamma(t_r))\dot\gamma(t_r)+\frac{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}}{cr}\partial_t\big(\delta(\mathbf{x}-\gamma(t_r))\big)\Big) && (5)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r}\Big(\dot\gamma(t_r)+\partial_t\int d^3x'\frac{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}}{cr}\delta(\mathbf{x}-\gamma(t_r))\dot\gamma(t_r)\Big) && (6)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r}\Big(\dot\gamma(t_r)+\partial_t\big(\frac{\mathbf{x}\cdot\gamma(t_r)}{cr}\dot\gamma(t_r)\big)\Big) && (7)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r}R\omega\Big(\mathbf{e}_{\varphi,t}+\frac{R\omega}{cr}\big((\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_{\varphi,t})\mathbf{e}_{\varphi,t}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_{r,t})\mathbf{e}_{r,t}\big)\Big) && (8)
\end{aligned}$$

2 Elektromagnetische Wellen

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Beschreibung elektromagnetischer Wellen durch das 4-Vektorpotential A^μ in verschiedenen Eichungen vorzustellen.

(a) Zeigen Sie, dass der Ausdruck

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = \mu_0 j^\mu \tag{9}$$

eichinvariant ist, d.h. wenn A^μ eine Lösung von Gleichung 9 ist, dann ist auch $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\chi$ mit einem skalaren Feld χ eine Lösung von Gleichung 9.

(b) Wir betrachten nun Gleichung 9 für den homogenen Fall, d.h. $j = 0$, in der sog. Lorenz-Eichung:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{10}$$

Wir wählen den Ansatz:

$$A^\mu = a^\mu e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \tag{11}$$

Zeigen Sie, dass dann aufgrund von Gleichung 10 gelten muss:

$$a^0 = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{\omega/c}$$

Zeigen Sie außerdem, dass mit $\omega = kc$ Gleichung 9 erfüllt ist.

(c) Es existiert eine andere Eichung, die sogenannte Coulomb-Eichung, so dass $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ und $A^0 = 0$. Zeigen Sie, dass in dieser Eichung gilt:

$$a^0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{k} = 0$$

Wieviele unabhängige Komponenten hat demnach $\mathbf{a}$?

(d) Berechnen Sie die elektrische und magnetische Feldstärke $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$. Zeigen Sie außerdem, dass die Vektoren $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$ in beiden Eichungen ein orthogonales System bilden, d.h. das elektromagnetische Wellen transversal sind.

Lösungsvorschlag:

(a)

$$\Box(A^\mu + \partial^\mu\chi) - \partial^\mu\partial_\nu(A^\nu + \partial^\nu\chi) = \Box A^\mu + \partial^\mu\Box\chi - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu - \partial^\mu\Box\chi = \Box A^\mu - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu = \mu_0 j^\mu \tag{12}$$

(b) Es gilt: $A^\mu = a^\mu e^{-ix^\nu k_\nu}$

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu a^\mu e^{-ix^\nu k_\nu} = a^\mu e^{-ix^\nu k_\nu}(-ik_\mu) = 0 \tag{13}$$

Dies impliziert:

$$k_\mu a^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0\frac{\omega}{c} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{\omega/c} \tag{14}$$

Gleichung 10 ist also erfüllt. Eine ähnliche Rechnung liefert für Gleichung 9

$$\Box A^\mu = -k^\nu k_\nu a^\mu e^{-ix^\rho k_\rho} \tag{15}$$

Da $k^\nu k_\nu = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \mathbf{k}^2$ gilt, ist Gleichung 9 mit $k = \frac{\omega}{c}$ erfüllt.

(c) Aus $A_0 = 0$ folgt direkt $a_0 = 0$.

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{a}e^{-ix^\nu k_\nu} = \mathbf{a}\cdot\nabla e^{-ix^\nu k_\nu} = i\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}e^{-ix^\nu k_\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{k} = 0 \tag{16}$$

Aus der Bedingung $\mathbf{a}\cdot\mathbf{k} = 0$ folgt, dass $\mathbf{a}$ nur zwei linear unabhängige Komponenten hat.

(d) Es gilt allgemein:

$$A = \begin{pmatrix}\phi/c\\ \mathbf{A}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A} = -ca_0\nabla e^{-ix^\nu k_\nu} + \mathbf{a}\partial_t e^{-ix^\nu k_\nu} = -ica_0\mathbf{k}e^{-ix^\nu k_\nu} + i\omega\mathbf{a}e^{-ix^\nu k_\nu} = i(\omega\mathbf{a} - a_0c\mathbf{k})e^{-ix^\nu k_\nu} \tag{17}$$

$$\mathbf{B} = \nabla\wedge\mathbf{A} = \nabla\wedge\mathbf{a}e^{-ix^\nu k_\nu} = \mathbf{a}\wedge\nabla e^{-ix^\nu k_\nu} = i\mathbf{a}\wedge\mathbf{k}e^{-ix^\nu k_\nu} \tag{18}$$

Nun zeigen wir noch, dass die Orthogonalität in beiden Eichungen erfüllt ist:

Lorenz-Eichung:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} \propto \mathbf{k}\cdot\mathbf{a}\wedge\mathbf{k} = 0$$
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} \propto \omega\mathbf{a}\cdot\mathbf{k} - ca_0\mathbf{k}^2 = \omega a_0\omega/c - ca_0\omega^2/c^2 = 0$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{E} \propto \mathbf{a}\wedge\mathbf{k}\cdot(\omega\mathbf{a} - ca_0\mathbf{k}) = 0$$

Coulomb-Eichung:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} \propto \mathbf{k}\cdot\mathbf{a}\wedge\mathbf{k} = 0$$
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} \propto \mathbf{a}\cdot\mathbf{k} = 0$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{E} \propto \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\wedge\mathbf{k}$$

3 Lorentzinvarianz

Begründen Sie aus der Lorentzinvarianz der Größen $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ und $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ folgende Aussagen:

(a) Ein reines **E**-Feld kann durch Lorentztransformation nicht in ein reines **B**-Feld übergehen.

(b) Falls **E**-Feld und **B**-Feld in einem Inertialsystem senkrecht aufeinander stehen, so gilt das auch in jedem anderen Inertialsystem (d.h. elektromagnetische Wellen sind in jedem Inertialsystem transversal).

Lösungsvorschlag:

(a) Wir betrachten den Feldstärketensor:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \qquad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \tag{19}$$

Daraus kann man ablesen:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\Big(\mathbf{B}^2 - \frac{\mathbf{E}^2}{c^2}\Big) \tag{20}$$

Ein reines **E**-Feld kann sich also nicht in ein reines **B**-Feld verwandeln, da sonst diese Lorentzinvariante das Vorzeichen wechseln würde.

(b) Hierfür betrachten wir den dualen Felstärketensor:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3/c & -E_2/c \\ B_2 & -E_3/c & 0 & E_1/c \\ B_3 & E_2/c & -E_1/c & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \tag{21}$$

Hiermit kann man sich eine weitere lorentzinvariante Größe bauen:

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{4}{c}\mathbf{B}\cdot\mathbf{E} \tag{22}$$

D.h., dass das Skalarprodukt von **E** und **B** erhalten ist, woraus sofort die Behauptung folgt.

4 Lorentztransformation

Ein unendlich langer dünner Draht sei mit der konstanten Längenladungsdichte λ geladen.

(a) Berechnen sie **E** und **B**.

(b) Betrachten Sie nun das System in einem Inertialsystem, dass sich mit der Geschwindigkeit v entlang des Drahtes bewegt. Berechnen Sie die Felder $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{B}'$ im neuen Inertialsystem.

Hinweis: Benutzen Sie folgende Formeln:

$$\mathbf{E}'_{\|} = \mathbf{E}'_{\|}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma\Big(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}_{\perp}\Big), \quad \mathbf{B}'_{\|} = \mathbf{B}'_{\|}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\Big(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\wedge\mathbf{E}_{\perp}\Big)$$

(c) Berechnen Sie $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{B}'$ erneut, indem sie den 4-Strom j^{μ} transformieren und daraus die Felder bestimmen.

Lösungsvorschlag:

(a) Da keine Ströme vorhanden sind ist $\mathbf{B}$ gleich Null.
Das elektrische Feld berechnet sich mit dem Satz von Gauß:

$$\int_V d^3x \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}) = \int_{\partial V} d^2x \mathbf{n}\cdot\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\epsilon_0} l\lambda = 2\pi r l E(r) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\mathbf{e}_r \tag{23}$$

(b) Der Draht sei in z-Richtung ausgedehnt. Dann gilt für die Geschwindigkeit: $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$
Des weiteren identifizieren wir:

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{E}_\parallel = 0, \qquad \mathbf{B}_\perp = \mathbf{B}_\parallel = 0 \tag{24}$$

Mit den angegebenen Formeln gilt dann:

$$\mathbf{E}'_\perp = \gamma\mathbf{E}, \qquad \mathbf{E}'_\parallel = 0 \tag{25}$$

$$\mathbf{B}'_\perp = -\frac{\gamma}{c^2}\mathbf{v}\wedge\mathbf{E} = -\frac{\gamma}{c^2}\frac{\lambda v}{2\pi\epsilon_0 r}\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{e}_r = -\frac{v\gamma\lambda\mu_0}{2\pi r}\mathbf{e}_\varphi, \qquad \mathbf{B}'_\parallel = 0 \tag{26}$$

(c) Der Viererstrom j^μ ist definiert als:

$$j = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{v}\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho \\ v\mathbf{e}_z\rho \end{pmatrix} \tag{27}$$

Die zu $\mathbf{v}$ gehörige Lorentztransformation lautet:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{28}$$

Der transformierte Viererstrom ergibt sich aus:

$$j' = \Lambda j = \gamma \begin{pmatrix} c\rho \\ 0 \\ 0 \\ -v\rho \end{pmatrix} \tag{29}$$

Die Ladungsdichte ist: $\rho = \frac{\lambda}{2\pi r}\delta(r)$
Für das E-Feld muss also nur λ durch $\gamma\lambda$ ersetzt werden, was mit dem Ergebnis aus (b) übereinstimmt.
Für das B-Feld berechnen wir mit Hilfe des Stoke'schen Satzes:

$$\mu_0 \int_A d\sigma\cdot\mathbf{j}' = \int_A d\sigma\cdot\nabla\wedge\mathbf{B} \tag{30}$$

$$= \int_{\partial A} d\mathbf{s}\cdot\mathbf{B} \tag{31}$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi r B(r) = -\mu_0 \int dr d\varphi r \frac{\lambda}{2\pi r}\gamma v\delta(r) \tag{32}$$

$$= -\mu_0\lambda\gamma v \tag{33}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}(r) = -\frac{\mu_0\gamma\lambda v}{2\pi r}\mathbf{e}_\varphi \tag{34}$$