Korbinian Münster (korbinian_muenster@ph.tum.de) **Blatt 3**

Ferienkurs Elektrodynamik - WS 08/09

1 Das klassische, strahlende Wasserstoff-Atom

Eine Punktladung q umkreist mit Radius R und konstanter Winkelgeschwindigkeit eine zweite Punktladung $-q$. Die Bewegung der Punktladung q sei im mathematischen Sinne in der xy-Ebene und die Punktladung $-q$ befinde sich im Ursprung.
Berechnen sie mit Hilfe der Näherungsformel für die Fernzone das zeitabhängige Vektorpotential $\mathbf{A}(t,\mathbf{x})$
Hinweis:

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{x}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d^3x' \left(\mathbf{j}(t-\frac{r}{c},\mathbf{x}') + \frac{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}}{cr}\partial_t \mathbf{j}(t-\frac{r}{c},\mathbf{x}') \right)$$

2 Elektromagnetische Wellen

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Beschreibung elektromagnetischer Wellen durch das 4-Vektorpotential A^μ in verschiedenen Eichungen vorzustellen.

(a) Zeigen Sie, dass der Ausdruck

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = \mu_0 j^\mu \tag{1}$$

eichinvariant ist, d.h. wenn A^μ eine Lösung von Gleichung 1 ist, dann ist auch $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\chi$ mit einem skalaren Feld χ eine Lösung von Gleichung 1.

(b) Wir betrachten nun Gleichung 1 für den homogenen Fall, d.h. $j = 0$, in der sog. Lorenz-Eichung:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{2}$$

Wir wählen den Ansatz:

$$A^\mu = a^\mu e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass dann aufgrund von Gleichung 2 gelten muss:

$$a^0 = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{\omega/c}$$

Zeigen Sie außerdem, dass mit $\omega = kc$ Gleichung 1 erfüllt ist.

(c) Es existiert eine andere Eichung, die sogenannte Coulomb-Eichung, so dass $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ und $A^0 = 0$. Zeigen Sie, dass in dieser Eichung gilt:

$$a^0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{k} = 0$$

Wieviele unabhängige Komponenten hat demnach $\mathbf{a}$?

(d) Berechnen Sie die elektrische und magnetische Feldstärke $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$. Zeigen Sie außerdem, dass die Vektoren $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$ in beiden Eichungen ein orthogonales System bilden, d.h. das elektromagnetische Wellen transversal sind.

3 Lorentzinvarianz

Begründen Sie aus der Lorentzinvarianz der Größen $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ und $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ folgende Aussagen:

(a) Ein reines $\mathbf{E}$-Feld kann durch Lorentztransformation nicht in ein reines $\mathbf{B}$-Feld übergehen.

(b) Falls $\mathbf{E}$-Feld und $\mathbf{B}$-Feld in einem Inertialsystem senkrecht aufeinander stehen, so gilt das auch in jedem anderen Inertialsystem (d.h. elektromagnetische Wellen sind in jedem Inertialsystem transversal).

4 Lorentztransformation

Ein unendlich langer dünner Draht sei mit der konstanten Längenladungsdichte λ geladen.

(a) Berechnen sie $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$.

(b) Betrachten Sie nun das System in einem Inertialsystem, dass sich mit der Geschwindigkeit v entlang des Drahtes bewegt. Berechnen Sie die Felder $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{B}'$ im neuen Inertialsystem.

Hinweis: Benutzen Sie folgende Formeln:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma\Big(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_{\perp}\Big), \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\Big(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}_{\perp}\Big)$$

(c) Berechnen Sie $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{B}'$ erneut, indem sie den 4-Strom j^{μ} transformieren und daraus die Felder bestimmen.