Korbinian Münster (korbinian_muenster@ph.tum.de) **Blatt 1**

Ferienkurs Elektrodynamik - WS 08/09

1 Spiegelladung für eine Kugel

Im Koordinatenursprung befinde sich eine metallische Kugel mit Radius a. Außerhalb der Kugel befinde sich im Abstand r vom Ursprung eine Ladung q. Bestimmen sie mit Hilfe der Spiegelladungsmethode das Potential außerhalb der Kugel.

Lösungsvorschlag:

Aus Symmetriegründen müssen der Koordinatenursprung, die Ladung q und die Spiegelladung q' auf einer Geraden liegen. Wir wählen nun das Koordinatensystem so, dass diese Gerade die x-Achse ist. Die Spiegelladung q' befindet sich im Abstand r' vom Ursprung innerhalb der Kugel. Nun müssen q' und r' bestimmt werden. Die Potentiale der Ladungen sind:

$$\phi_q(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|r\mathbf{e}_x - \mathbf{x}|} \qquad \phi_{q'}(\mathbf{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|r'\mathbf{e}_x - \mathbf{x}|} \tag{1}$$

mit

$$|r\mathbf{e}_r - \mathbf{x}| = ((x-r)^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = (|\mathbf{x}| + r^2 - 2xr)^{1/2} \tag{2}$$

Auf der Kugeloberfläche ($|\mathbf{x}| = a$) muss gelten:

$$\phi_q(\mathbf{x}) + \phi_{q'}(\mathbf{x}) = 0 \tag{3}$$

d.h. es muss für alle $x \in [-a, a]$ gelten:

$$\frac{q}{(a^2 + r^2 - 2xr)^{1/2}} = \frac{q'}{(a^2 + r'^2 - 2xr')^{1/2}} \tag{4}$$

insbesondere für $x = a$ und $x = -a$

$x = a$:

$$\Rightarrow \frac{q}{|a-r|} = \frac{q'}{|a-r'|} \qquad \Rightarrow \frac{q}{r-a} = \frac{q'}{a-r'} \tag{5}$$

$x = -a$:

$$\Rightarrow \frac{q}{a+r} = \frac{q'}{a+r'} \tag{6}$$

Aus diesen zwei Gleichungen ergibt sich dann für r' und q':

$$r' = \frac{a^2}{r} \qquad q' = -q\frac{a}{r} \tag{7}$$

2 Dielektrikum

Betrachten Sie zwei konzentrische Kugelschalen mit Gesamtladung Q bzw. $-Q$ und Radius a bzw. b ($a < b$). Im Zwischenraum befinde sich ein Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ.
Berechnen Sie das elektrische Potential $\varphi(\mathbf{x})$, das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ sowie die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ im gesamten Raum.

Lösungsvorschlag:

Wir unterteilen den Raum in drei Bereiche:

$$\text{I: } r < a \qquad \text{II: } a < r < b \qquad \text{III: } r < b \tag{8}$$

Zuerst berechnen wir die dielektrische Verschiebung über $\int_V d^3x\, \nabla \cdot \mathbf{D} = \int_{\partial V} dA\, \mathbf{D} = \int_V d^3x \rho_f$:

$$\text{I: } \mathbf{D}_I = 0 \qquad \text{II: } \mathbf{D}_{II} = \frac{Q}{4\pi}\frac{\mathbf{x}}{r^3} \qquad \text{III: } \mathbf{D}_{III} = 0 \tag{9}$$

Da das Medium als linear und isotrop angenommen wird gilt: $\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}$

$$\text{I: } \mathbf{E}_I = 0 \qquad \text{II: } \mathbf{E}_{II} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{\mathbf{x}}{r^3} \qquad \text{III: } \mathbf{E}_{III} = 0 \tag{10}$$

Das Potential berechnet sich über $-\nabla\phi = \mathbf{E}$. Außerdem muss das Potential stetig sein. Unter der Verwendung von $-\nabla\frac{1}{r} = \frac{\mathbf{x}}{r^3}$ folgt:

$$\text{I: } \phi_I = c_1 \qquad \text{II: } \phi_{II} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{1}{r} + c_2 \qquad \text{III: } \phi_{III} = c_3 \tag{11}$$

Mit $\phi(|\mathbf{x}| \to \infty) = 0$ folgt $c_3 = 0$. Aus den Stetigkeitsbedingungen

$$\phi_I(|\mathbf{x}| = a) = \phi_{II}(|\mathbf{x}| = a) \quad \text{und} \quad \phi_{II}(|\mathbf{x}| = b) = \phi_{III}(|\mathbf{x}| = b) = 0$$

folgt:

$$c_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{1}{b} \qquad c_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{12}$$

3 Dipolmoment

(a) Berechnen Sie das Dipolmoment $\mathbf{p}$ für eine Kugel mit Radius a und Oberflächen-Ladungsdichte $\sigma = \sigma_0 \cdot \cos\vartheta$ (ϑ ist der Polarwinkel in Kugelkoordinaten). Überlegen Sie sich zuerst welche Komponenten des Dipolmoments aus Symmetriegründen verschwinden müssen, und berechnen Sie dann die verbleibende(n) Komponente(n).

(b) Zeigen Sie allgemein, dass das Dipolmoment $\mathbf{p}$ einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$ unabhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs ist (Translationsinvarianz), falls die Gesamtladung gleich Null ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Ladungsverteilung ist rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse, d.h. es kann nur eine nichtverschwindene Komponente in z-Richtung geben. Es gilt: $\rho = \delta(r-a)\sigma$

$$p_z = \int d^3x z\rho(\mathbf{x}) = \int drd\theta d\varphi\, r^2\sin(\vartheta)\, r\cos(\vartheta)\, \delta(r-a)\sigma_0\cos(\vartheta) = 2\pi a^3\sigma_0 \int_{-1}^{1} dx\, x^2 = \frac{4\pi a^3\sigma_0}{3} \tag{13}$$

(b)

$$\mathbf{p} = \int d^3x\, \mathbf{x}\rho(\mathbf{x}) = \int d^3x'\, (\mathbf{x}' + \mathbf{a})\rho(\mathbf{x}' + \mathbf{a}) = \int d^3x'\, \mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}' + \mathbf{a}) = \int d^3x'\, \mathbf{x}'\rho'(\mathbf{x}') \tag{14}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass $\int d^3x'\, \mathbf{a}\rho'(\mathbf{x}') = Q\mathbf{a} = 0$

4 Potentiale, Felder

(a) Gegeben sei das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (yz, xz, xy)^T$. Bestimmen Sie ein dazugehöriges elektrostatisches Potential.

(b) Gegeben sei das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = B_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi$ (in Zylinderkoordinaten). Wie lautet ein dazu passendes Vektropotential?

(c) Können die folgenden Vektorfelder ein statisches elektrisches Feld beschreiben? Wenn ja, dann geben Sie die dazugehörige Ladungsdichte ρ an.

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = r \cdot \mathbf{e}_x \qquad \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = f(r) \cdot \mathbf{e}_r$$

Lösungsvorschlag:

(a)

$$-\nabla\phi = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \phi = -xyz + c \tag{15}$$

(b)

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = B_0 \mathbf{e}_\varphi \qquad \text{und} \qquad \nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi \partial_\varphi + \mathbf{e}_z \partial_z \tag{16}$$

Ansatz: $\mathbf{A} = A(r)\mathbf{e}_z$

$$\Rightarrow \ \nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \wedge \partial_r A(r)\mathbf{e}_z = -\partial_r A(r)\mathbf{e}_\varphi = B_0 \mathbf{e}_\varphi \tag{17}$$

$$\Rightarrow \ \partial_r A(r) = -B_0 \qquad \Rightarrow \ A(r) = -B_0 r + c \qquad \Rightarrow \ \mathbf{A} = (-B_0 r + c)\mathbf{e}_z \tag{18}$$

(c) Falls F_i ein elektrostatische Feld beschreibt, muss gelten:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \tag{19}$$

(1)

$$\nabla \wedge (r\mathbf{e}_x) = (\nabla r) \wedge \mathbf{e}_x + r(\nabla \wedge \mathbf{e}_x) = \frac{\mathbf{x}}{r} \wedge \mathbf{e}_x = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} \neq 0 \tag{20}$$

(2)

$$\nabla \wedge (f(r)\mathbf{e}_r) = \nabla \wedge (\frac{f(r\infty)}{r}\mathbf{x}) = (\nabla \frac{f(r)}{r}) \wedge \mathbf{x} + \frac{f(r)}{r}\nabla \wedge \mathbf{x} = (\mathbf{e}_r \partial_r \frac{f(r)}{r}) \wedge \mathbf{x} = 0 \tag{21}$$

Die Ladungsdichte berechnet sich über: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot f(r)\mathbf{e}_r = \nabla \cdot \Big(\frac{f(r)}{r}\mathbf{x}\Big) \tag{22}$$

$$= \Big(\nabla \frac{f(r)}{r}\Big) \cdot \mathbf{x} + \frac{f(r)}{r}\nabla \cdot \mathbf{x} \tag{23}$$

$$= \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{x}\Big(\partial_r \frac{f(r)}{r}\Big) + \frac{f(r)}{r}3 = \frac{3f(r)}{r} + r\Big(\partial_r \frac{f(r)}{r}\Big) \tag{24}$$

5 Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten

Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Laplacegleichung $-\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = 0$ in Zylinderkoordinaten gegeben ist durch:

$$\phi(\mathbf{x}) = A_0 + B_0 \cdot \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big((A_n r^n + B_n r^{-n}) \cdot \cos n\varphi + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \cdot \sin n\varphi\Big)$$

Hinweis: Verwenden Sie den Seperationsansatz $\phi(\mathbf{x}) = f(r)g(\varphi)$ und den Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten $\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2$.

Lösungsvorschlag:

definiere: $\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r = \nabla_r^2$

$$\Rightarrow \quad \nabla_r^2 f(r)g(\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 g(\varphi)f(r) = 0 \tag{25}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\nabla_r^2 f(r)}{f(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial_\varphi^2 g(\varphi)}{g(\varphi)} = 0 \tag{26}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r^2\nabla_r^2 f(r)}{f(r)} + \frac{\partial_\varphi^2 g(\varphi)}{g(\varphi)} = 0 \tag{27}$$

Beide Terme hängen nur noch von einer Variablen ab, so dass gelten muss:

$$\text{I:}\quad \frac{r^2\nabla_r^2 f(r)}{f(r)} = -c \qquad \text{und} \qquad \text{II:}\quad \frac{\partial_\varphi^2 g(\varphi)}{g(\varphi)} = c \tag{28}$$

Die Lösungen zu II sind von der Form $e^{\pm\varphi\sqrt{c}}$. Die Funktion $g(\varphi)$ muss nun aber der Randbedingung $g(2\pi) = g(0)$ (entspricht dem gleichen Punkt in Zylinderkoordinaten) genügen, das heißt periodisch sein. Daraus lässt sich der Wertebereich für c festlegen, denn:

$$c > 0 \quad \Rightarrow \quad g(\varphi) \propto e^{\pm\varphi\sqrt{|c|}} \quad \Rightarrow \quad \text{nicht periodisch} \tag{29}$$

$$c < 0 \quad \Rightarrow \quad g(\varphi) \propto e^{\pm i\varphi\sqrt{|c|}} \quad \Rightarrow \quad \text{periodisch} \tag{30}$$

Damit g auch noch 2π-periodisch ist, muss $c = -n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$ gelten (lässt man ganz $\mathbb{Z}$ für n zu, so erhält man keine neuen Lösungen). Die Lösungen von g in Abhänigkeit von n sind nun:

$$g_n(\varphi) = a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi) \tag{31}$$

Nun muss noch die zugehörige Funktion $f_n(r)$ bestimmt werden. Wähle den Ansatz $f_n(r) \propto r^\alpha$.

$$\Rightarrow \quad (r^2\partial_r^2 + r\partial_r)r^\alpha = \big(\alpha(\alpha-1)+\alpha\big)r^\alpha = \alpha^2 r^\alpha = n^2 r^\alpha \tag{32}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha^2 = n^2 \tag{33}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \pm n \tag{34}$$

Daraus ergibt sich für $n \neq 0$:

$$f_n(r) = c_n r^{-n} + d_n r^n \tag{35}$$

Der Fall $n = 0$ muss gesondert betrtachten, da es auch hier zwei linear unabhängige Lösungen gibt:

$$f_0(r) = c_0 + d_0\ln(r) \qquad \text{(Beweis durch z.B. nachrechen)} \tag{36}$$

Summiert man nun über alle diese Lösungen $g_n(\varphi)f_n(r)$ mit beliebigen Koeffizienten, so ergibt sich die Behauptung.