

# Ferienkurs *Theoretische Mechanik* – Frühjahr 2009

## Hamilton Mechanik (Lösungen)

### 1 Poisson-Klammern (\*)

- Im Folgenden bezeichnen  $l_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  die Komponenten des Drehimpulses. Berechnen Sie folgende Poisson-Klammern:

$$[l_i, x_j], [l_i, p_j], [l_i, l_j], [\vec{l}^2, l_i]$$

$$[l_i, \vec{r} \cdot \vec{p}], [p_i, r^n]$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} [l_i, x_j] &= \sum_{l,k=1}^3 [\epsilon_{kli} x_k p_l, x_j] = \sum_{l,k=1}^3 -\epsilon_{kli} x_k \delta_{lj} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_k \\ [l_i, p_j] &= \sum_{l,k=1}^3 [\epsilon_{kli} x_k p_l, p_j] = \sum_{l,k=1}^3 \epsilon_{kli} p_l \delta_{kj} = \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ijl} p_l \\ [l_i, l_j] &= \sum_{l,k=1}^3 [l_i, \epsilon_{klj} x_k p_l] = \sum_{l,k=1}^3 \epsilon_{klj} ([l_i, x_k] p_l + x_k [l_i, p_l]) \\ &= \sum_{l,k,m=1}^3 \epsilon_{klj} (\epsilon_{ikm} x_m p_l + \epsilon_{ilm} x_k p_m) \\ &= \sum_{l,m=1}^3 (\delta_{lm} \delta_{ij} - \delta_{li} \delta_{mj}) x_m p_l + \sum_{k,m=1}^3 (\delta_{jm} \delta_{ki} - \delta_{ji} \delta_{km}) x_k p_m \\ &= x_i p_j - x_j p_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} l_k \\ [\vec{l}^2, l_i] &= \sum_{j=1}^3 [l_j^2, l_i] = \sum_{j=1}^3 2l_j [l_j, l_i] \\ &= \sum_{j,k=1}^3 2l_j \epsilon_{jik} l_k = \sum_{j,k=1}^3 l_j l_k \epsilon_{jik} + \sum_{k,j=1}^3 l_k l_j \epsilon_{kij} = 0 \end{aligned}$$

$$[l_i, \vec{r} \cdot \vec{p}] = \sum_{k=1}^3 [l_i, x_k p_k] = \sum_{l,k=1}^3 \epsilon_{ikl} (x_k p_l + p_k x_l) = 0 \quad (1)$$

$$[p_i, r^n] = -\frac{\partial r^n}{\partial x_i} = -n r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x_i} = -n x_i r^{n-2} \quad (2)$$

- Zeigen Sie, unter der Annahme, dass  $f$  und  $g$  Erhaltungsgrößen sind, auch  $[f, g]$  erhalten ist.

### Lösung:

Laut Annahme gilt:

$$\frac{df}{dt} = [f, \mathcal{H}] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{dg}{dt} = [g, \mathcal{H}] + \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

Folglich ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \frac{df}{dt}, g \right] + \left[ f, \frac{dg}{dt} \right] = \left[ [f, \mathcal{H}] + \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, [g, \mathcal{H}] + \frac{\partial g}{\partial t} \right] = [[f, \mathcal{H}], g] + [f, [g, \mathcal{H}]] + \frac{\partial}{\partial t} [f, g] \\ &= [f, [g, \mathcal{H}]] + [g, [\mathcal{H}, f]] + \frac{\partial}{\partial t} [f, g] - [\mathcal{H}, [g, f]] + \frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \frac{d}{dt} [f, g] \end{aligned}$$

Daher ist  $[f, g]$  eine Erhaltungsgröße.

## 2 Hamilton-Mechanik

### 2.1 Hamilton-Funktion in verschiedenen Koordinatensystemen(\*) (Klausuraufgabe)

Ein Wagen wird mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  auf der  $x$ -Achse bewegt. Auf seiner Ladefläche schwingt eine Masse  $m$ , die über eine Feder mit der hinteren Ladewand verbunden ist, reibungsfrei in  $x$ -Richtung hin und her. Dabei sei  $l_0$  der Abstand der Masse  $m$  von der hinteren Ladewand im Gleichgewicht.

- Berechnen Sie die Hamilton-Funktion im ruhenden Inertialsystem und untersuchen Sie, ob sie eine Erhaltungsgröße ist und gleich der Energie ist. Begründen Sie das Ergebnis physikalisch.
- Führen Sie die Transformation  $x = x' + v_0 t$  auf das bewegte Bezugssystem des Wagens durch und untersuchen Sie die Hamilton-Funktion erneut

### Lösung:

- Im ruhenden Inertialsystem lautet die Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} (x - v_0 t - l_0)^2$$

Daraus bekommt man die Hamilton-Funktion:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} (x - v_0 t - l_0)^2 = T + V = E$$

Die Hamilton-Funktion ist somit gleich der Energie. Allerdings ist sie wegen der expliziten Zeitabhängigkeit keine Erhaltungsgröße. Das ist darauf zurückzuführen, dass der Oszillator bei zusammengedrückter Feder Energie vom Wagen aufnimmt und bei gedehnter Feder wieder an den Wagen zurückgibt.

•

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x', \dot{x}') &= \frac{m}{2} (\dot{x}' + v_0)^2 - \frac{k}{2} (x' - l_0)^2 \\ \Rightarrow p' &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'} = m (\dot{x}' + v_0)\end{aligned}$$

Daraus folgt für die transformierte Hamilton-Funktion:

$$\mathcal{H}'(x', p') = \frac{p'^2}{2m} + \frac{k}{2} (x' - l_0)^2 - v_0 p' = \mathcal{H}[x(x'), p(p')] - v_0 p' \neq E$$

Hier haben wir die umgekehrte Situation. Wegen der Zeitunabhängigkeit der Hamilton-Funktion ist sie eine Erhaltungsgröße, aber wegen dem Term  $-v_0 p'$  nicht mehr gleich der Energie.

Dennoch führen beide Hamilton-Funktionen auf die gleichwertigen Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} + kx = k(v_0 t + l_0) \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x}' + kx' = kl_0$$

## 2.2 Aus Doctoral General Examination (2002) des MIT (\*\*)

Ein Teilchen der Masse  $m$  ist durch einen Faden mit variabler Länge  $l(t)$  mit dem Ursprung verbunden. Ferner ist das Teilchen in einer Ebene gebunden. Die Länge  $l(t)$  des Fadens ist beliebig, aber stets gilt, dass  $|l/\dot{l}|$  viel größer als die Schwingungsdauer des Pendels ist und  $\dot{l} \geq 0$ . Die Ebene enthält den Aufhängepunkt des Fadens und ihre Normale stehe senkrecht zu einem homogenen Gravitationsfeld.

- Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t)$  und die Hamilton-Funktion  $\mathcal{H}(\theta, p, t)$  dieses dynamischen Systems.

### Lösung:

Wenn  $\theta$  den Winkel bezeichnet, der die Auslenkung aus der Ruhelage des Systems beschreibt, so ist die potentielle Energie stets gegeben durch:

$$V = -mgl \cos \theta$$

Ferner kann die Berechnung der kinetischen Energie in ebenen Polarkoordinaten erfolgen:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\theta}^2)$$

Die Lagrange-Funktion des Systems lautet daher:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{m}{2} (\dot{l}(t)^2 + l(t)^2 \dot{\theta}^2) + mgl(t) \cos \theta$$

Der zu  $\theta$  kanonisch konjugierte Impuls errechnet sich zu:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml(t)^2 \dot{\theta}$$

Über die Definition der Hamilton-Funktion  $\mathcal{H}$  folgt daher:

$$\mathcal{H}(\theta, p, t) = \dot{\theta} p - \mathcal{L} = -\frac{m}{2} \dot{l}(t)^2 + \frac{p^2}{2ml(t)^2} - mgl(t) \cos \theta$$

- Ist die Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie des Systems? Ist die Hamilton-Funktion erhalten? Falls die Hamilton-Funktion nicht gleich der Gesamtenergie ist, ist die Gesamtenergie erhalten?

### Lösung:

Die Gesamtenergie des Systems  $T + V$  ist

$$E = T + V = \frac{m}{2} \dot{l}(t)^2 + \frac{p^2}{2ml(t)^2} - mgl(t) \cos \theta = \mathcal{H} + m\dot{l}(t)^2 \neq \mathcal{H}$$

Offenbar ist die Hamilton-Funktion nicht gleich der Gesamtenergie des Systems. Die Hamilton-Funktion ist nicht erhalten, da

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -m\dot{l}(t)\ddot{l}(t) - \frac{p^2}{ml(t)^3} \dot{l}(t) - mgl(t) \cos \theta \neq 0$$

Die Gesamtenergie ist auch nicht erhalten, da

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} + 2m\dot{l}(t)\ddot{l}(t) \neq 0$$

- Geben Sie eine Bewegungsgleichung für den Winkel  $\theta$  an. Wie groß ist die Periodendauer der Schwingung, wenn  $\dot{l} = 0$  gilt, in der Kleinwinkelnäherung?

### Lösung:

Die Bewegungsgleichung für  $\theta$  ergibt sich beispielsweise aus den Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} ml(t)^2 \dot{\theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl(t) \sin \theta$$

Daraus kann die Bewegungsgleichung gewonnen werden:

$$\ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{l}(t)}{l(t)} \dot{\theta} + \frac{g}{l(t)} \sin \theta = 0$$

Setzt man nun  $\dot{l} = 0$  und  $\sin \theta \approx \theta$  an, so findet sich die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators:

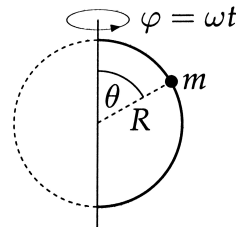
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Offenbar beträgt die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

## 3 Perle auf rotierendem Draht (\*\*)

Ein Teilchen sei auf einem halbkreisförmig rotierenden Draht angebracht und auf diesem frei beweglich. Der Draht rotiere mit konstantem  $\omega$  um die fest vorgegebene Achse im kräftefreien Raum.



- Stellen Sie die Lagrangefunktion  $\mathcal{L}$  auf.
- Berechnen Sie damit die Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}$  und stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf.
- Bestimmen Sie die Gesamtenergie  $E$  und berechne  $\frac{dE}{dt}$ . Was ist dafür die physikalische Begründung?
- Berechnen Sie  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$  und vergleichen Sie  $\mathcal{H}$  mit der Energie.

## Lösung:

1. Die Lagrange-Funktion für ein freies Teilchen in Kugelkoordinaten lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 \right)$$

Zwangsbedingungen einsetzen:

$$\begin{aligned} r &= R, & \varphi &= \omega t \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m \left( R^2 \dot{\vartheta}^2 + R^2 \sin^2(\vartheta) \omega^2 \right) \end{aligned}$$

2. Bei der Hamilton-Funktion beachte man, dass es nur einen Freiheitsgrad gibt. Zuerst den kanonischen Impuls ausrechnen:

$$p_{\vartheta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = mR^2 \dot{\vartheta}$$

Jetzt nach der Geschwindigkeit auflösen:

$$\dot{\vartheta} = \frac{p_{\vartheta}}{mR^2}$$

dann die Hamilton-Funktion bestimmen und die Geschwindigkeit durch den kanonischen Impuls eliminieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_{\vartheta} \dot{\vartheta} - \mathcal{L} \\ &= \frac{p_{\vartheta}^2}{mR^2} - \frac{1}{2}m \left( R^2 \dot{\vartheta}^2 + R^2 \sin^2(\vartheta) \omega^2 \right) \\ &= \frac{p_{\vartheta}^2}{2mR^2} - \frac{1}{2}mR^2 \sin^2(\vartheta) \omega^2 \end{aligned}$$

Jetzt die kanonischen Gleichungen berechnen und zu einer einzigen Bewegungsgleichung zusammenführen:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\vartheta} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} = mR^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \omega^2 \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\vartheta}} = \frac{p_{\vartheta}}{mR^2} \\ \Rightarrow \ddot{\vartheta} - \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \omega^2 &= 0 \end{aligned}$$

Das ist die DGL für  $\vartheta$ .

3. Da  $\mathcal{L} = T = E$ , weil  $V = 0$  ist, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d\mathcal{L}}{dt} = m \left( R^2 \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} + R^2 \dot{\vartheta} \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \omega^2 \right) \\ &= mR^2 \dot{\vartheta} \underbrace{\left( \ddot{\vartheta} + \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \omega^2 \right)}_{\neq 0} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Das folgt aus der Bewegungsgleichung für  $\vartheta$  (Man beachte das Plus!). Die physikalische Begründung ist natürlich, dass die Zwangsbedingung zeitabhängig ist (der Draht dreht sich ständig) und somit dem System Energie zu- und abgeführt werden kann.

4. Die totale Zeitableitung der Hamilton-Funktion ist gleich ihrer partiellen:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \\ \text{andererseits:} &= \frac{p_{\vartheta} \dot{p}_{\vartheta}}{mR^2} - \dot{\vartheta} mR^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \omega^2 \\ &= \frac{p_{\vartheta} \dot{p}_{\vartheta}}{mR^2} - \frac{p_{\vartheta} \dot{p}_{\vartheta}}{mR^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion ist also erhalten, die Energie aber nicht! Daraus folgt sofort:

$$\mathcal{H} \neq E$$

## 4 Teilchen im elektromagnetischen Feld (\*\*\*)

Ein geladenes Teilchen bewege sich in einem beliebigen elektromagnetischen Magnetfeld. Die Lagrange-Funktion beschreibt die Bewegung:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \vec{v}^2 + e\vec{A}(\vec{r}(t), t) \cdot \vec{v} - e\Phi(\vec{r}(t), t)$$

- Berechnen Sie den konjugierten Impuls  $\vec{P}$  und bestimmen Sie die Hamilton-Funktion  $\mathcal{H}$ .
- Leiten Sie daraus die kanonische Bewegungsgleichungen des Teilchens  
**Hinweise:**
  - In Gradienten rechnen spart Schreibearbeit!
  - Nützliche Vektoridentität:  $\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b})$
- Setzen Sie die Gleichung für  $\vec{v}$  in die Gleichung für  $\dot{\vec{P}}$  ein und weisen Sie nach, dass die Formel für die Lorentz-Kraft rauskommt. Dabei verwende man:  $\vec{E} = -\left(\nabla\Phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$  und  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ .

### Lösung:

1. Den konjugierten Impuls  $\vec{P}$  berechnet man aus:

$$\vec{P} = \nabla_{\vec{v}}\mathcal{L} = m\vec{v} + e\vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{P} - e\vec{A}}{m}$$

Daraus bekommt man die Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \vec{P} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} \\ &= \frac{\vec{P}(\vec{P} - e\vec{A})}{m} - \frac{(\vec{P} - e\vec{A})^2}{2m} - \frac{e\vec{A}(\vec{P} - e\vec{A})}{m} + e\Phi \\ &= \frac{(\vec{P} - e\vec{A})^2}{m} - \frac{(\vec{P} - e\vec{A})^2}{2m} + e\Phi \\ &= \frac{(\vec{P} - e\vec{A})^2}{2m} + e\Phi \end{aligned}$$

Diese sieht aus wie die Hamilton-Funktion eines Teilchens im gewöhnlichen Potential, allerdings mit der Modifikation  $\vec{P} \rightarrow \vec{P} - e\vec{A}$

2. Koordinatenfreie Bestimmung der kanonischen Gleichung für  $\dot{\vec{r}}$ :

$$\vec{v} = \nabla_{\vec{P}}\mathcal{L} = \frac{(\vec{P} - e\vec{A})}{m}$$

Und für  $\dot{\vec{P}}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{P}} &= -\nabla\mathcal{L} = -\nabla\left(\frac{\vec{P}^2 - 2e\vec{P}\vec{A} + e^2\vec{A}^2}{2m} + e\Phi\right) \\ &= \frac{e\nabla(\vec{P} \cdot \vec{A})}{m} - \frac{e^2\nabla(\vec{A} \cdot \vec{A})}{2m} - e\nabla\Phi \end{aligned}$$

Die gegebene Vektoridentität setzt man hier ein, beachte aber dabei, dass  $\vec{P}$  nicht explizit von irgendeinem Ort abhängt, womit  $\nabla\vec{P}$  und  $\nabla \times \vec{P}$  verschwinden:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{P}} &= \frac{e}{m} (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{A} + \frac{e}{m} \vec{P} \times (\nabla \times \vec{A}) - \frac{e^2}{2m} \cdot 2 (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{A} - \frac{e^2}{2m} \cdot 2 \vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) - e \nabla \Phi \\ &= \frac{e}{m} \left[ (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{P} \times \vec{B} - e (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{A} - e \vec{A} \times \vec{B} \right] - e \nabla \Phi\end{aligned}$$

3. Zuerst löst man die Gleichung für  $\vec{v}$  nach  $\vec{P}$  auf:

$$\vec{P} = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}$$

und differenziert sie nach der Zeit. **Achtung:** Hier soll man bei  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}(t), t)$  über die Kettenregel die implizite Zeitabhängigkeit von  $\vec{r}$  berücksichtigen!

$$\dot{\vec{P}} = m\dot{\vec{v}} + e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e \left[ \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot \nabla \right] \vec{A} = m\ddot{\vec{r}} + e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) \vec{A}$$

Diese Gleichung setzt man zusammen mit der Definition von  $\vec{P}$  in die kanonische Gleichung für  $\dot{\vec{P}}$  ein und eliminiert damit den Impuls:

$$\begin{aligned}m\ddot{\vec{r}} + e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) \vec{A} &= \frac{e}{m} \left[ (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{P} \times \vec{B} - e (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{A} - e \vec{A} \times \vec{B} \right] - e \nabla \Phi \\ &= \frac{e}{m} \left\{ \left[ (m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}) \cdot \nabla \right] \vec{A} + (m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}) \times \vec{B} - e (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{A} - e \vec{A} \times \vec{B} \right\} - e \nabla \Phi \\ &= \frac{e}{m} \left\{ (m\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) \vec{A} + m\dot{\vec{r}} \times \vec{B} \right\} - e \nabla \Phi \\ &= e (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) \vec{A} + e\dot{\vec{r}} \times \vec{B} - e \nabla \Phi\end{aligned}$$

Aufgelöst nach dem Kraftterm  $m\ddot{\vec{r}}$  ergibt dies:

$$m\ddot{\vec{r}} = -e \left( \nabla \Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + e\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = e \underline{(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$$

womit man wieder die Lorentz-Kraft bekommt.