Ahmed Omran

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* – Frühjahr 2009

Hamilton Mechanik

1 Poisson-Klammern (*)

- Im Folgenden bezeichnen $l_i, \quad i = 1, 2, 3$ die Komponenten des Drehimpulses. Berechnen Sie folgende Poisson-Klammern:

$$[l_i, x_j]\,,\ \ [l_i, p_j]\,,\ \ [l_i, l_j]\,,\ \ \left[\vec{l}^2, l_i\right]$$

$$[l_i, \vec{r}\cdot\vec{p}]\,,\ \ [p_i, r^n]$$

- Zeigen Sie, unter der Annahme, dass f und g Erhaltungsgrößen sind, auch $[f, g]$ erhalten ist.

2 Hamilton-Mechanik

2.1 Hamilton-Funktion in verschiedenen Koordinatensystemen(*) (Klausuraufgabe)

Ein Wagen wird mit konstanter Geschwindigkeit v_0 auf der x-Achse bewegt. Auf seiner Ladefläche schwingt eine Masse m, die über eine Feder mit der hinteren Ladewand verbunden ist, reibungsfrei in x-Richtung hin und her. Dabei sei l_0 der Abstand der Masse m von der hinteren Ladewand im Gleichgewicht.

- Berechnen Sie die Hamilton-Funktion im ruhenden Inertialsystem und untersuchen Sie, ob sie eine Erhaltungsgröße ist und gleich der Energie ist. Begründen Sie das Ergebnis physikalisch.
- Führen Sie die Transformation $x = x' + v_0 t$ auf das bewegte Bezugssystem des Wagens durch und untersuchen Sie die Hamilton-Funktion erneut

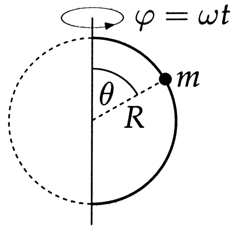
2.2 Aus *Doctoral General Examination (2002)* des MIT (**)

Ein Teilchen der Masse m ist durch einen Faden mit variabler Länge $l(t)$ mit dem Ursprung verbunden. Ferner ist das Teilchen in einer Ebene gebunden. Die Länge $l(t)$ des Fadens ist beliebig, aber stets gilt, dass $|l/\dot{l}|$ viel größer als die Schwingungsdauer des Pendels ist und $\dot{l} \geq 0$. Die Ebene enthält den Aufhängepunkt des Fadens und ihre Normale stehe senkrecht zu einem homogenen Gravitationsfeld.

- Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t)$ und die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}(\theta, p, t)$ dieses dynamischen Systems.
- Ist die Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie des Systems? Ist die Hamilton-Funktion erhalten? Falls die Hamilton-Funktion nicht gleich der Gesamtenergie ist, ist die Gesamtenergie erhalten?
- Geben Sie eine Bewegungsgleichung für den Winkel θ an. Wie groß ist die Periodendauer der Schwingung, wenn $\dot{l} = 0$ gilt, in der Kleinwinkelnäherung?

2.3 Perle auf rotierendem Draht (**)

Ein Teilchen sei auf einem halbkreisförmig rotierenden Draht angebracht und auf diesem frei beweglich. Der Draht rotiere mit konstantem ω um die fest vorgegebene Achse im kräftefreien Raum.



- Stellen Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ auf.
- Berechnen Sie damit die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ und stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf.
- Bestimmen Sie die Gesamtenergie E und berechne $\frac{dE}{dt}$. Was ist dafür die physikalische Begründung?
- Berechnen Sie $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ und vergleichen Sie $\mathcal{H}$ mit der Energie.

3 Teilchen im elektromagnetischen Feld (***)

Ein geladenes Teilchen bewege sich in einem beliebigen elektromagnetischen Magnetfeld. Die Lagrange-Funktion beschreibt die Bewegung:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + e\vec{A}\left(\vec{r}(t), t\right) \cdot \vec{v} - e\Phi\left(\vec{r}(t), t\right)$$

- Berechnen Sie den konjugierten Impuls $\vec{P}$ und bestimmen Sie die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}$.
- Leiten Sie daraus die kanonische Bewegungsgleichungen des Teilchens
  Hinweise:
  - In Gradienten rechnen spart Schreibarbeit!
  - Nützliche Vektoridentität: $\nabla\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \cdot \nabla\right)\vec{b} + \left(\vec{b} \cdot \nabla\right)\vec{a} + \vec{b} \times \left(\nabla \times \vec{a}\right) + \vec{a} \times \left(\nabla \times \vec{b}\right)$
- Setzen Sie die Gleichung für $\vec{v}$ in die Gleichung für $\dot{\vec{P}}$ ein und weisen Sie nach, dass die Formel für die Lorentz-Kraft rauskommt. Dabei verwende man: $\vec{E} = -\left(\nabla\Phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$ und $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.