Christoph Schnarr

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* – Frühjahr 2009

Starre Körper (Lösungen)

1 Bestimmung von Trägheitstensoren

Berechnen Sie die Komponenten I_{kl} des Trägheitstensors bezüglich des Schwerpunkts für folgende Körper:

- Eine Kugel mit Radius R mit einer in radialer Richtung quadratisch anwachsender Massendichte $\rho(\vec{r}) = \mu r^2$
- Einen Zylinder mit Länge L und Radius R mit homogener Massendichte ρ

Drücken Sie die Komponenten des Trägheitstensors durch die Gesamtmasse M aus.
Lösung:

- Kugel mit Radius und Dichte $\rho(\vec{r}) = \mu r^2$:
  Wahl von Kugelkoordinaten sehr günstig:

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

  Für den Betrag des Vektors $\vec{r}$ gilt folglich: $||\vec{r}|| = r$
  Der Schwerpunkt dieser Kugel liegt trotz einer nicht-konstanten Dichte im Mittelpunkt der Kugel, da die Dichte nur von r abhängt und sich in alle Richtungen gleich ändert.

  Berechnung der Komponenten I_{kl}: Es gilt:

$$I_{kl} = \int\limits_V \rho(r)(r^2\delta_{kl} - x_k x_l)dV$$

Für die Komponente I_{11} gilt somit:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int\limits_V \rho(r)(r^2 - x_1^2)dV \\
&= \int\limits_{\theta=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{R} \left[\mu r^2\left(r^2 - r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\right)\right] r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta \\
&= \mu\int\limits_{\theta=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{R} \left[r^6\left(\sin\theta - \sin^3\theta\cos^2\varphi\right)\right] dr d\varphi d\theta \\
&= \mu\frac{R^7}{7}\int\limits_{\theta=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\left(\sin\theta - \sin^3\theta\cos^2\varphi\right)\right] d\varphi d\theta \\
&= \mu\frac{R^7}{7}\int\limits_{\theta=0}^{\pi} \left[\left(2\pi\sin\theta - \pi\sin^3\theta\right)\right] d\theta \\
&= \frac{8}{21}\pi R^7\mu
\end{aligned}$$

Aufgrund der Kugelsymmetrie um den Schwerpunkt folgt, dass die Diagonalelemente gleich sind:

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{8}{21}\pi R^7\mu$$

Für die Nicht-Diagonal-Elemente gilt:

$$\begin{aligned}
I_{12} = I_{21} &= \int\limits_V \rho(r)(-x_1x_2)dV \\
&= \int\limits_{\theta=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{R} \left[\mu r^2\left(-r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\right)\right] r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

(wg. φ Integration: $\cos x\sin x = \frac{1}{2}\sin(2x)$)
Wegen der Rotationssymmetrie folgt weiter, dass die anderen nicht-diagonal Elemente ebenfalls verschwinden:

$$I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} = 0$$

Um den Tensor durch die Gesamtmasse ausdrücken zu können, muss diese aus der Dichte berechnet werden:

$$\begin{aligned}
M &= \int\limits_V dm \\
&= \int\limits_V \rho(r)dV \\
&= \int\limits_{\theta=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{R} \mu r^2 r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta \\
&= \frac{4}{5}\mu R^5\pi
\end{aligned}$$

Der gesamte Trägheitstensor lässt sich dann schreiben als:

$$I = \frac{10}{21} R^2 M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Zylinder mit Länge L und Radius R mit homogener Massendichte ρ In diesem Fall ist die Wahl von Zylinderkoordinaten sehr günstig:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Für den Betrag von $\vec{r}$ gilt: $||\vec{r}||^2 = r^2 + z^2$
Da der Zylinder homogen ist, liegt der Schwerpunkt offensichtlich im Mittelpunkt des Zylinders.
Für die Komponente I_{11} gilt:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int\limits_V \rho \cdot (r^2 + z^2 - r^2\cos^2\varphi) dV \\
&= \rho \int\limits_{-L/2}^{L/2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} \left(r^2 + z^2 - r^2\cos^2\varphi\right) r dr d\varphi dz \\
&= \rho \int\limits_{-L/2}^{L/2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} \left(r^3\sin^2\varphi + rz^2\right) dr d\varphi dz \\
&= \rho \int\limits_{-L/2}^{L/2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{4}R^4\sin^2\varphi + \frac{1}{2}R^2z^2\right) d\varphi dz \\
&= \rho \int\limits_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{1}{4}R^4\pi + 2\pi\frac{1}{2}R^2z^2\right) dz \\
&= \rho \left(\frac{1}{4}R^4\pi L + \frac{1}{12}L^3\pi R^2\right) \\
&= \rho\pi R^2 L \left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}L^2\right)
\end{aligned}$$

Die Integration für die Komponente I_{22} erfolgt analog zur Komponente I_{11}:

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \int\limits_V \rho \cdot (r^2 + z^2 - r^2\sin^2\varphi) dV \\
&= \rho \int\limits_{-L/2}^{L/2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} \left(r^2 + z^2 - r^2\sin^2\varphi\right) r dr d\varphi dz \\
&= \rho\pi R^2 L \left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}L^2\right)
\end{aligned}$$

Für die Komponente I_{33} gilt:

$$\begin{aligned}
I_{33} &= \int\limits_V \rho \cdot (r^2 + z^2 - z^2) dV \\
&= \rho \int\limits_{-L/2}^{L/2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} r^2 r dr d\varphi dz \\
&= \frac{1}{2} \rho \pi R^4 L
\end{aligned}$$

Für die nicht-diagonal Elemente gilt:

$$I_{12} = I_{21} = \rho \int\limits_V -r^2 \cos\varphi \sin\varphi dV = 0$$

(wegen φ Integration: $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin(2x)$
$\Rightarrow$ Integration über zwei volle Perioden)

$$I_{13} = I_{31} = \rho \int\limits_V -rz \cos\varphi dV = 0$$

(wegen φ Integration
$\Rightarrow$ Integration über volle Periode)

$$I_{23} = I_{32} = \rho \int\limits_V -rz \sin\varphi dV = 0$$

(wegen φ Integration
$\Rightarrow$ Integration über volle Periode)

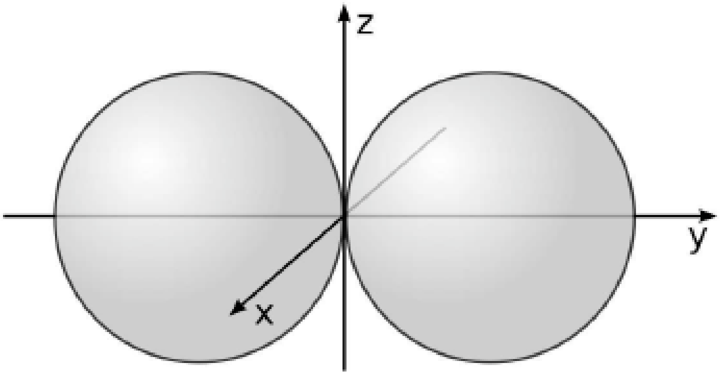
Für die Masse des Zylinders gilt wegen der homogenen Dichte:

$$M = \rho V = \rho 2\pi R^2 L$$

Damit folgt für den Trägheitstensor I:

$$I = M \begin{pmatrix} \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}L^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}L^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}R^2 \end{pmatrix}$$

2 Das Trägheitsmoment zweier Kugeln



Berechnen Sie den Trägheitstensor von zwei identischen Kugeln, die am Ursprung zusammengeklebt sind und jeweils den Radius R sowie die Masse M haben. Drücken Sie den Trägheitstensor durch die Masse aus.

LÖSUNG:

Der Trägheitstensor einer homogenen Kugel mit Radius R und Masse M, deren Ursprung im Kugelmittelpunkt liegt, hat lediglich gleich große Diagonalelemente, da die Kugel vollständig symmetrisch ist:

$$\begin{aligned}
I_{11} = I_{22} = I_{33} &= \int_V \rho(r)(r^2 - x_1^2)dV \\
&= \rho \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \left[\left(r^2 - r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi\right)\right] r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta \\
&= \rho \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \left[r^4 \left(\sin\theta - \sin^3\theta \cos^2\varphi\right)\right] dr d\varphi d\theta \\
&= \rho \frac{R^5}{5} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\left(\sin\theta - \sin^3\theta \cos^2\varphi\right)\right] d\varphi d\theta \\
&= \rho \frac{R^5}{5} \int_{\theta=0}^{\pi} \left[\left(2\pi \sin\theta - \pi \sin^3\theta\right)\right] d\theta \\
&= \frac{R^5}{5} \frac{8}{3} \rho \pi
\end{aligned}$$

Die Masse einer homogenen Kugel lautet:

$$M = \frac{4}{3}\rho R^3 \pi$$

Damit gilt für den Trägheitstensor einer Kugel:

$$I = \frac{2}{5} R^2 M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Trägheitstensor wird nun mit Hilfe des Satzes von Steiner so umgerechnet, dass er für eine um $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$ nach rechts und für eine um $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix}$ nach links verschobene Kugel gilt. Der Satz von Steiner lautet:

$$I^*_{ij} = I^{CM}_{ij} + M(a_k^2 \delta_{ij} - a_i a_j)$$

Damit folgt für die um $\vec{a}_1$ verschobene Kugel:

$$\begin{aligned} I^*_{11} = I^*_{33} &= \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2 \\ I^*_{22} &= \frac{2}{5}MR^2 \\ I^*_{12} = I^*_{13} = I^*_{23} &= 0 \end{aligned}$$

Für die um $\vec{a}_2$ verschobene Kugel gilt analog:

$$\begin{aligned} I^*_{11} = I^*_{33} &= \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2 \\ I^*_{22} &= \frac{2}{5}MR^2 \\ I^*_{12} = I^*_{13} = I^*_{23} &= 0 \end{aligned}$$

Für den Trägheitstensor der zusammengeklebten Kugeln gilt dann, dass er gleich der Summe der Tensoren der beiden verschobenen Kugeln ist, die sie sich jetzt auf den gleichen Ursprung beziehen.
Also gilt:

$$I_{ges} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{5}MR^2 \end{pmatrix}$$

3 Diagonalisieren des Trägheitstensors

Gegeben sei folgender nicht-diagonaler Trägheitstensor eines Körpers mit konstanter Massendichte und der Gesamtmasse M:

$$I = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 & 0 & \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}a^2 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}a^2 & 0 & \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 \end{pmatrix}$$

Bringen Sie den Tensor auf Diagonalform und bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente und -achsen. Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix und daraus eine mögliche ausgeführte Operation auf das Koordinatensystem. Verfizieren Sie, dass sich der diagonalisierte Trägheitstensor durch Anwendung der Transformationsmatrix ergibt.

Lösung:

Zur Lösung wird der Vorfaktor $\frac{M}{12}$ zunächst nicht beachtet und am Ende der Lösung wieder eingefügt.
1. Bestimmung der Eigenwerte ($\widehat{=}$ Hauptträgheitsmomente)
Hierzu Lösung des Eigenwertproblems $\det(I - \lambda \mathbb{1}) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \lambda & 0 & \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}a^2 \\ 0 & a^2 + c^2 - \lambda & 0 \\ \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}a^2 & 0 & \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Daraus folgt nach Entwicklung nach der 2. Spalte das charakteristische Polynom:

$$(a^2+c^2-\lambda)\left[\left(\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}c^2-\lambda\right)^2-\left(\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{2}a^2\right)^2\right]$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Die erste Nullstelle lässt sich leicht ablesen:

$$\lambda_1 = a^2+c^2$$

Zur Berechnung der weiteren Nullstellen ist es geschickt, folgende Substitution zu wählen:

$$\widehat{c} = \frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}c^2$$

$$\widehat{d} = \frac{1}{2}c^2-\frac{1}{2}a^2$$

Es folgt damit:

$$(\widehat{c}-\lambda)^2-\hat{d}^2 = 0$$

Mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen folgt:

$$\lambda_{2,3} = \widehat{c}\pm\widehat{d}$$

Resubstituiert folgt:

$$\lambda_2 = a^2+c^2$$
$$\lambda_3 = 2a^2$$

Daraus folgt für den diagonalisierten Trägheitstensor unter Berücksichtigung des Vorfaktors:

$$I_{diag} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} a^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmung der Eigenvektoren ($\widehat{=}$ Hauptträgheitsachsen) Hierzu werden die zuvor berechneten Eigenwerte in das Eigenwertproblem eingesetzt:
Für $\lambda_{1,2} = a^2+c^2$ folgt:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}c^2-a^2-c^2 & 0 & \frac{1}{2}c^2-\frac{1}{2}a^2 \\ 0 & a^2+c^2-a^2-c^2 & 0 \\ \frac{1}{2}c^2-\frac{1}{2}a^2 & 0 & \frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}c^2-a^2-c^2 \end{pmatrix}\vec{v}_{1,2} = 0$$

Damit folgt für die Komponenten der Vektoren $\vec{v}_{1,2}$:

$$v_1 = v_3$$

Es lassen sich damit die (normierten) Eigenvektoren bestimmen:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_3 = 2a^2$ folgt:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}c^2-2a^2 & 0 & \frac{1}{2}c^2-\frac{1}{2}a^2 \\ 0 & a^2+c^2-2a^2 & 0 \\ \frac{1}{2}c^2-\frac{1}{2}a^2 & 0 & \frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}c^2-2a^2 \end{pmatrix}\vec{v}_3 = 0$$

Damit gilt für die Komponenten des Vektors $\vec{v}_3$: $v_1 + v_3 = 0$ und $v_2 = 0$. Es lässt dich damit der (normierte) Eigenvektor $\vec{v}_3$ finden:

$$\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus den orthonormalen Eigenvektoren folgt die Transformationsmatrix S:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man kann erkennen, dass das ursprüngliche Koordinatensystem um den Winkel 45° um die y-Achse rotiert wurde, da die Matrix S dem Transponierten der Drehmatrix $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entspricht und somit die umgekehrte Drehung repräsentiert.
Der Schluss auf eine Drehmatrix ist naheliegend, da die Komponenten $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und 1 vorkommen, was auf Winkelfunktionen hindeutet. Durch Vergleich mit den bekannten Drehmatrizen bestätigt sich dieser Verdacht:

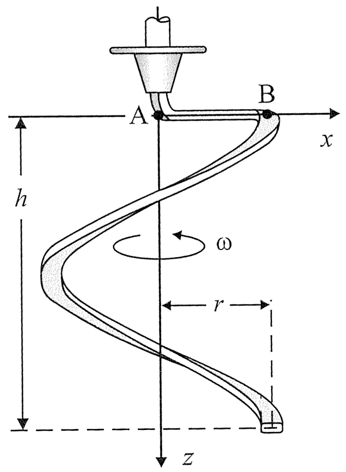
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

4 Eine Knetmaschine

Eine zylindrische Spirale mit n Windungen, Masse m, Höhe h und Radius r dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse.

- Berechnen Sie den Trägheitstensor der Knetspirale Hinweis: Vernachlässigen Sie den Beitrag der Spiralenhalterung von A nach B
- Welches Drehmoment muss das Lager im Punkt A aufnehmen?



Lösung:

- Da die Masse pro Winkel konstant ist, lässt sich leicht eine Winkelmassendichte definieren:

$$\rho = \frac{m}{2\pi n}$$

Zur Berechnung der einzelnen Komponenten des Trägheitstensors wird dann lediglich über den Winkel integriert. x und y werden hierbei durch Polarkoordinaten und z durch den Winkel φ

parametrisiert:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \\
y &= r\sin\varphi \\
z &= \frac{h}{2\pi n}\varphi
\end{aligned}$$

Für die Komponente I_{11} gilt dann:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{m}{2\pi n}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi n}\left(y^2+z^2\right)\,d\varphi \\
&= \frac{m}{2\pi n}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi n}\left[(r\sin\varphi)^2+\left(\frac{h}{2\pi n}\varphi\right)^2\right]\,d\varphi \\
&= \frac{m}{2\pi n}\left[\frac{r^2}{2}\varphi-\frac{r^2}{4}\sin 2\varphi+\left(\frac{h}{2\pi n}\right)^2\frac{\varphi^3}{3}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{2\pi n} \\
&= m\left(\frac{r^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)
\end{aligned}$$

Da das Integral über eine ganze Periode von $\sin^2$ und $\cos^2$ das gleiche Ergebnis liefern, gilt:

$$I_{22}=I_{11}=m\left(\frac{r^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)$$

Für die Komponente I_{33} gilt:

$$\begin{aligned}
I_{33} &= \frac{m}{2\pi n}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi n}\left(x^2+y^2\right)\,d\varphi \\
&= \frac{m}{2\pi n}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi n}r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)\,d\varphi \\
&= \frac{m}{2\pi n}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi n}r^2\,d\varphi \\
&= \frac{m}{2\pi n}2\pi n r^2 \\
&= mr^2
\end{aligned}$$

Für die Komponenten $I_{13}=I_{31}$ gilt:

$$\begin{aligned}
I_{13}=I_{31} &= \frac{m}{2\pi n}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi n}\left(-r\varphi\cos\varphi\frac{h}{2\pi n}\right)\,d\varphi \\
&= -\frac{m}{2\pi n}\frac{h}{2\pi n}r\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi n}\left(\varphi\cos\varphi\right)\,d\varphi \\
&= -\frac{m}{2\pi n}\frac{h}{2\pi n}r\left[\left[\varphi\sin\varphi\right]_0^{2\pi n}-\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi n}\sin\varphi\,d\varphi\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Für die Komponenten $I_{12} = I_{21}$ gilt die gleiche Argumentation wie für I_{13}. Daraus folgt:

$$I_{12} = I_{21} = 0$$

Für die Komponenten $I_{23} = I_{32}$ gilt:

$$\begin{aligned}
I_{23} = I_{32} &= -\frac{m}{2\pi n}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi n} yz\ d\varphi \\
&= -\frac{m}{2\pi n}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi n} r\sin\varphi\frac{h}{2\pi n}\varphi\ d\varphi \\
&= -\frac{mrh}{(2\pi n)^2}\left[-\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\right]_0^{2\pi n} \\
&= m\frac{rh}{2\pi n}
\end{aligned}$$

Daraus folgt für den Tensor I:

$$I = m\begin{pmatrix} \frac{r^2}{2}+\frac{h^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{2}+\frac{h^2}{3} & \frac{rh}{2\pi n} \\ 0 & \frac{rh}{2\pi n} & r^2 \end{pmatrix}$$

- Für das wirkende Drehmoment $\vec{M}$ gilt:

$$\vec{M} = \frac{d_k}{dt}\vec{L} + \vec{\omega}\times\vec{L}$$

Da der Ursprung des körperfesten Systems ruht, verschwindet der Term $\frac{d_k}{dt}\vec{L}$. Somit gilt:

$$\vec{M} = \vec{\omega}\times\vec{L}$$

Da der Stab um die z-Achse rotiert, ist

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}\times\left[\begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ \omega I_{23} \\ \omega I_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\omega^2 I_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -m\omega^2\frac{rh}{2\pi n}\hat{e}_x
\end{aligned}$$

Diese Darstellung gilt im körperfesten System der Spirale.
Um das Ergebnis auf der Intertialsystem umzurechnen, muss man den erhaltenen Vektor mit einer Drehmatrix für Drehungen um die z-Achse multiplizieren:

$$\vec{M}_{IS} = -m\omega^2\frac{rh}{2\pi n}\begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\hat{e}_x = -m\omega^2\frac{rh}{2\pi n}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

5 Kegel im Schwerefeld

Es wird ein Kegel der Höhe H mit Öffnungswinkel 2α und konstanter Massendichte ρ betrachtet.

- Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Kegels
- Berechnen Sie den Trägheitstensor $I^*_{kl} = I^*_k \delta_{kl}$ im Hauptachsensystem mit Ursprung in der Spitze des Kegels. Drücken Sie das Ergebnis durch die Gesamtmasse M aus
- Berechnen Sie den Trägheitstensor $I^{CM}_{kl} = I^{CM}_k \delta_{kl}$ im Hauptachsensystem mit Ursprung im Schwerpunkt des Kegels
- Stellen Sie die Lagrange-Funktion für einen Kegel im homogenen Schwerefeld $\vec{g}$ der Erde auf, dessen Spitze an einem raumfesten Punkt aufgehängt ist, d.h. sich nicht bewegen kann. Zeigen Sie, dass sich die kinetische Energie in der Form $T = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{3} I^*_k \omega_k^2$ schreiben lässt. Hierbei stellt ω_i die Rotation um die kartesische $\hat{e}_i$-Achse dar.

Im weiteren Verlauf sind folgende Definitionen für die ω_i zu verwenden:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\
\omega_2 &= -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\
\omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta
\end{aligned}$$

Die Winkel ψ, ϕ, θ sind hierbei die Euler-Winkel, deren genaue Bedeutung im Folgenden jedoch nicht maßgeblich ist.

- Betrachten Sie den Fall, dass $\psi = \phi = 0$ ist und der Kegel sich somit nur in einer Ebene senkrecht zur xy-Ebene bewegt.
  Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $\theta(t)$ auf und finden Sie die Gleichgewichtslagen und diskutieren Sie deren Stabilität.
  Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die stabile Gleichgewichtslage.

Lösung:

Die Parametrisierung des Kegels erfolgt in Zylinderkoordinaten, wobei die z-Achse in Richtung der Kegelachse zeigen soll. Der Radius bei einer bestimmten Höhe z beträgt dabei:

$$r = z\tan\alpha$$

- Der Massenschwerpunkt $\vec{S}$ einer kontinuierlichen Massenverteilung ist gegeben als:

$$\vec{S} = \frac{1}{M}\int\limits_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV$$

Damit folgt für die einzelnen Komponenten S_i:

$$S_x = \frac{1}{V}\int\limits_{z=0}^{H}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{z\tan\alpha} r^2\cos\varphi \; drd\varphi dz = 0$$

$$S_y = \frac{1}{V}\int\limits_{z=0}^{H}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{z\tan\alpha} r^2\sin\varphi \; drd\varphi dz = 0$$

$$
\begin{aligned}
S_z &= \frac{1}{V}\int\limits_{z=0}^{H}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{z\tan\alpha} rz\ drd\varphi dz \\
&= \frac{1}{V}\int\limits_{z=0}^{H}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{2}z^3\tan^2\alpha\ d\varphi dz \\
&= \frac{1}{V}\int\limits_{z=0}^{H}\pi z^3\tan^2\alpha\ dz \\
&= \frac{1}{V}\frac{1}{4}H^4\pi\tan^2\alpha \\
&= \frac{3}{\pi H^3\tan^2\alpha}\frac{1}{4}H^4\pi\tan^2\alpha \\
&= \frac{3}{4}H
\end{aligned}
$$

Für den Schwerpunktvektor $\vec{S}$ gilt also:

$$
\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4}H \end{pmatrix}
$$

- Für die Komponente I_1^* des Trägheitstensors gilt:

$$
\begin{aligned}
I_1^* &= \int\limits_V \rho\left(\vec{r}^2 - x_1^2\right)dV \\
&= \rho\int\limits_{z=0}^{H}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{z\tan\alpha}\left(r^2+z^2-r^2\cos^2\varphi\right)r\ drd\varphi dz \\
&= \rho\int\limits_{z=0}^{H}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{z\tan\alpha}\left[r^3\left(1-\cos^2\varphi\right)+rz^2\right]\ drd\varphi dz \\
&= \rho\int\limits_{z=0}^{H}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{1}{4}z^4\tan^4\alpha\left(1-\cos^2\varphi\right)+\frac{1}{2}z^2\tan^2\alpha z^2\right]\ d\varphi dz \\
&= \rho\int\limits_{z=0}^{H}\left[\frac{1}{4}z^4\tan^4\alpha\,(2\pi-\pi)+\pi z^4\tan^2\alpha\right]\ dz \\
&= \rho\frac{H^5\pi}{5}\left(\frac{1}{4}\tan^4\alpha+\tan^2\alpha\right)
\end{aligned}
$$

Für die Komponente I_2^* des Trägheitstensors gilt:

$$\begin{aligned}
I_2^* &= \int\limits_V \rho\left(r^2+z^2-r^2\sin^2\varphi\right)dV \\
&= \rho\int\limits_{z=0}^{H}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{z\tan\alpha}\left[r^3\left(1-\sin^2\varphi\right)+rz^2\right]\,drd\varphi dz \\
&= \rho\int\limits_{z=0}^{H}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{1}{4}z^4\tan^4\alpha\left(1-\sin^2\varphi\right)+\frac{1}{2}z^4\tan^2\alpha\right]\,d\varphi dz \\
&= \rho\int\limits_{z=0}^{H}\left[\frac{1}{4}z^4\tan^4\alpha\pi+\pi z^4\tan^2\alpha\right]\,dz \\
&= \frac{\rho\pi H^5}{5}\left(\frac{\tan^4\alpha}{4}+\tan^2\alpha\right)
\end{aligned}$$

Für die Komponente I_3^* des Trägheitstensors gilt:

$$\begin{aligned}
I_3^* &= \int\limits_V \rho\left(r^2+z^2-z^2\right)dV \\
&= \rho\int\limits_{z=0}^{H}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{z\tan\alpha} r^3\,drd\varphi dz \\
&= \rho\int\limits_{z=0}^{H}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{4}z^4\tan^4\alpha\,d\varphi dz \\
&= \rho\int\limits_{z=0}^{H}\frac{1}{2}\pi z^4\tan^4\alpha\,dz \\
&= \rho\frac{H^5}{5}\frac{\pi}{2}\tan^4\alpha
\end{aligned}$$

Wegen der homogenen Dichte gilt für die Masse des Kegels:

$$M=\rho V=\rho\pi\tan^2\alpha\frac{H^3}{3}$$

Damit gilt für den Trägheitstensor I^*:

$$I^*=\frac{3}{5}MH^2\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\tan^2\alpha+1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\tan^2\alpha+1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\tan^2\alpha\end{pmatrix}$$

- Der Satz von Steiner besagt, dass für die Komponenten des Trägheitstensors für um den Vektor $\vec{a}$ verschobene Achsen folgender Zusammenhang gilt:

$$I_{kl}^*=I_{kl}^{CM}+M\left[\vec{a}^2\delta_{kl}-a_ka_l\right]$$

Aufgelöst nach I_{kl}^{CM} folgt:

$$I_{kl}^{CM}=I_{kl}^*-M\left[\vec{a}^2\delta_{kl}-a_ka_l\right]$$

Für den Vektor $\vec{a}$ wird nun der entgegengesetzte Schwerpunktsvektor $-\vec{S}$ eingesetzt und damit gilt für die transformierten Komponenten:

$$
\begin{aligned}
I_1^{CM} &= \frac{3}{5}H^2M\left(\frac{1}{4}\tan^2\alpha+1\right)-M\frac{9}{16}H^2=\frac{3}{80}\left(4\tan^2\alpha+1\right)H^2M \\
I_2^{CM} &= \frac{3}{5}H^2M\left(\frac{1}{4}\tan^2\alpha+1\right)-M\frac{9}{16}H^2=\frac{3}{80}\left(4\tan^2\alpha+1\right)H^2M \\
I_3^{CM} &= \frac{3}{10}\tan^2\alpha MH^2+0=\frac{3}{10}\tan^2\alpha MH^2
\end{aligned}
$$

Für den gesamten Tensor I^{CM} gilt:

$$
I^{CM}=\frac{3}{80}MH^2\begin{pmatrix} 4\tan^2\alpha+1 & 0 & 0 \\ 0 & 4\tan^2\alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 8\tan^2\alpha \end{pmatrix}
$$

- Die Lagrange Funktion $\mathcal{L}$ ist defniert als $\mathcal{L}=T-V$. T hat hierbei einen Rotations- und einen Translationsbeitrag:

  $$T=T_{rot}+T_s$$

  Die potentielle Energie U ist hierbei gegeben durch

  $$U=Mgs\cos\theta$$

  s ist hierbei der Betrag des Schwerpunktvektors, θ der Winkel zwischen der Kegelachse und der xy-Ebene.

$$
\begin{aligned}
T &= T_s+T_{rot} \\
&= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3}I_{kl}^{CM}\omega_k\omega_l \\
&\quad \omega_3 \text{ liefert keinen Beitrag zur kinetischen Energie, } I_k^{CM} \text{ ist diagonal} \\
&= \frac{1}{2}Ms^2(\omega_1^2+\omega_2^2)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}I_k^{CM}\omega_k^2 \\
&= \frac{1}{2}M\left(\frac{3}{4}H\right)^2\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)+\frac{1}{2}\left[I_1^{CM}\omega_1^2+I_2^{CM}\omega_2^2+I_3^{CM}\omega_3^2\right] \\
&= \frac{1}{2}M\left(\frac{3}{4}H\right)^2\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)+\frac{1}{2}\left[\left(I_1^*-M\left(\frac{3}{4}H\right)^2\right)\omega_1^2+\left(I_2^*-M\left(\frac{3}{4}H\right)^2\right)\omega_2^2+I_3^*\omega_3^2\right] \\
&= \omega_1^2\left[\frac{1}{2}M\left(\frac{3}{4}H\right)^2+\frac{1}{2}I_1^*-\frac{1}{2}M\left(\frac{3}{4}H\right)^2\right]+\omega_2^2\left[\frac{1}{2}M\left(\frac{3}{4}H\right)^2+\frac{1}{2}I_2^*-\frac{1}{2}M\left(\frac{3}{4}H\right)^2\right] \\
&\quad +\omega_3^2\left[\frac{1}{2}I_3^*\right] \\
&= \frac{1}{2}\omega_1^2I_1^*+\frac{1}{2}\omega_2^2I_2^*+\frac{1}{2}\omega_3^2I_3^* \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}I_k^*\omega_k^2
\end{aligned}
$$

Für die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ gilt folglich:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}=T-V &= \sum_{k=1}^{3}I_k^*\omega_k^{*2}-Mg\frac{3}{4}H\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(I_1^*\omega_1^2+I_2^*\omega_2^2+I_3^*\omega_3^2\right)-Mg\frac{3}{4}H\cos\theta
\end{aligned}
$$

- Setzt man in die zuvor gefundene Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ die in der Aufgabenstellung gegebenen Definitionen für die ω_i unter der Voraussetzung $\psi = \phi = 0$ ein, so folgt:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_1^* \dot{\theta}^2 - \frac{3}{4} MgH \cos\theta$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung für $\theta(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(I_1^* \dot{\theta}\right) - \frac{3}{4} MgH \sin\theta &= 0 \\ I_1^* \ddot{\theta} - \frac{3}{4} MgH \sin\theta &= 0 \\ \ddot{\theta} - \frac{3}{4I_1^*} MgH \sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

Gleichgewichtslagen: Die Bedingung für Gleichgewichtslagen ist die zeitliche Stationarität:

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$$

Damit folgen aus der Bewegungsgleichung folgende Gleichgewichtslagen:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0 \ \text{(Kegel steht auf der Spitze senkrecht nach oben)} \\ \theta_2 &= \pi \ \text{(Kegel hängt an der Spitze senkrecht nach unten)} \end{aligned}$$

Diskussion der Stabilität und Lösung der Bewegungsgleichung:

$\theta_1 = 0$:
$\delta(t)$ sei eine kleine Auslenkung um θ_1. Durch einsetzen in die Bewegungsgleichung folgt:

$$\ddot{\delta}(t) - \underbrace{\frac{3}{4I_1^*} MgH}_{\alpha} \sin\delta(t) = 0$$

Durch Linearisierung folgt:

$$\ddot{\delta}(t) - \alpha\delta(t) = 0 \quad \text{mit } \alpha > 0$$

Durch Exponentialansatz folgt:

$$\delta(t) = A \exp\left(\sqrt{\alpha} t\right) + B \exp\left(-\sqrt{\alpha} t\right)$$

Da die Lösung nicht schwingt, sondern exponentiell abfällt bzw. ansteigt ist die Gleichgewichtslage instabil.

$\theta_2 = \pi$:
$\delta(t)$ sei eine kleine Auslenkung um θ_2. Durch einsetzen in die Bewegungsgleichung folgt:

$$\ddot{\delta}(t) - \underbrace{\frac{3}{4I_1^*} MgH}_{\alpha} \sin(\pi + \delta(t)) = 0$$

Unter Ausnutzung von $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ folgt:

$$\ddot{\delta}(t) + \alpha \sin(\delta(t)) = 0 \quad \text{mit } \alpha > 0$$

Durch Linearisierung folgt:

$$\ddot{\delta}(t) + \alpha\delta(t) = 0$$

Durch Exponentialansatz folgt:

$$\delta(t) = A \sin\left(\sqrt{\alpha} t\right) + B \cos\left(\sqrt{\alpha} t\right)$$

Da die Lösung eine Schwingung ist, ist die Gleichgewichtslage stabil.