Christoph Schnarr Blatt 4

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* – Frühjahr 2009

Starre Körper

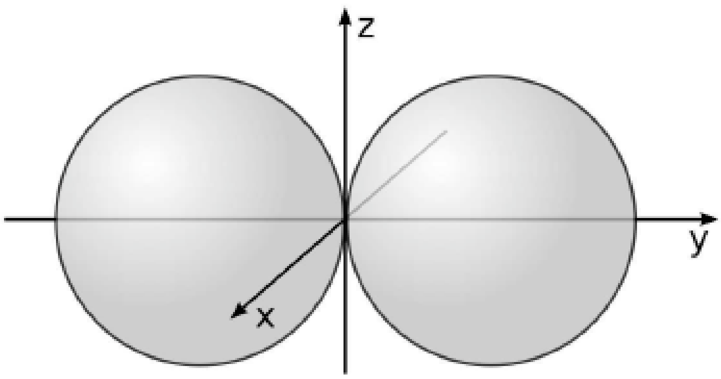
1 Bestimmung von Trägheitstensoren

Berechnen Sie die Komponenten I_{kl} des Trägheitstensors bezüglich des Schwerpunkts für folgende Körper:

- Eine Kugel mit Radius R mit einer in radialer Richtung quadratisch anwachsender Massendichte $\rho(\vec{r}) = \mu r^2$
- Einen Zylinder mit Länge L und Radius R mit homogener Massendichte ρ

Drücken Sie die Komponenten des Trägheitstensors durch die Gesamtmasse M aus.

2 Das Trägheitsmoment zweier Kugeln



Berechnen Sie den Trägheitstensor von zwei identischen Kugeln, die am Ursprung zusammengeklebt sind und jeweils den Radius R sowie die Masse M haben. Drücken Sie den Trägheitstensor durch die Masse aus.

3 Diagonalisieren des Trägheitstensors

Gegeben sei folgender nicht-diagonaler Trägheitstensor eines Körpers mit konstanter Massendichte und der Gesamtmasse M:

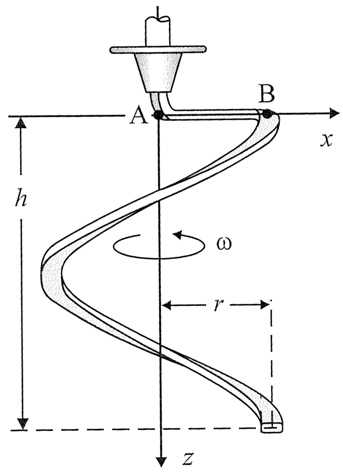
$$I = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 & 0 & \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}a^2 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}a^2 & 0 & \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 \end{pmatrix}$$

Bringen Sie den Tensor auf Diagonalform und bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente und -achsen. Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix und daraus eine mögliche ausgeführte Operation auf das Koordinatensystem. Verfizieren Sie, dass sich der diagonalisierte Trägheitstensor durch Anwendung der Transformationsmatrix ergibt.

4 Eine Knetmaschine

Eine zylindrische Spirale mit n Windungen, Masse m, Höhe h und Radius r dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse.

- Berechnen Sie den Trägheitstensor der Knetspirale Hinweis: Vernachlässigen Sie den Beitrag der Spiralenhalterung von A nach B
- Welches Drehmoment muss das Lager im Punkt A aufnehmen?



5 Kegel im Schwerefeld

Es wird ein Kegel der Höhe H mit Öffnungswinkel 2α und konstanter Massendichte ρ betrachtet.

- Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Kegels
- Berechnen Sie den Trägheitstensor $I^*_{kl} = I^*_k \delta_{kl}$ im Hauptachsensystem mit Ursprung in der Spitze des Kegels. Drücken Sie das Ergebnis durch die Gesamtmasse M aus
- Berechnen Sie den Trägheitstensor $I^{CM}_{kl} = I^{CM}_k \delta_{kl}$ im Hauptachsensystem mit Ursprung im Schwerpunkt des Kegels
- Stellen Sie die Lagrange-Funktion für einen Kegel im homogenen Schwerefeld $\vec{g}$ der Erde auf, dessen Spitze an einem raumfesten Punkt aufgehängt ist, d.h. sich nicht bewegen kann. Zeigen Sie, dass sich die kinetische Energie in der Form $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} I^*_k \omega_k^2$ schreiben lässt. Hierbei stellt ω_i die Rotation um die kartesische $\hat{e}_i$-Achse dar.

Im weiteren Verlauf sind folgende Definitionen für die ω_i zu verwenden:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ \omega_2 &= -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{aligned}$$

Die Winkel ψ, ϕ, θ sind hierbei die Euler-Winkel, deren genaue Bedeutung im Folgenden jedoch nicht maßgeblich ist.

- Betrachten Sie den Fall, dass $\psi = \phi = 0$ ist und der Kegel sich somit nur in einer Ebene senkrecht zur xy-Ebene bewegt.
  Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $\theta\,(t)$ auf und finden Sie die Gleichgewichtslagen und diskutieren Sie deren Stabilität.
  Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die stabile Gleichgewichtslage.