Christoph Schnarr

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* – Frühjahr 2009

Schwingungssysteme (Lösungen)

1 Gedämpfte Schwingungen mit Anregung

Ein Teilchen der Masse m und Ladung q bewege sich unter dem Einfluss Stokesscher Reibung in einem homogenen, harmonisch mit der Frequenz ω oszillierenden elektrischen Feld.

- Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Massepunkt auf.

  LÖSUNG:

  Das elektrische Feld kann dargestellt werden durch die Gleichung

  $$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cos \omega t$$

  Die Stokessche Kraft wird dargestellt durch:

  $$\vec{F}_{Stokes} = -\beta \dot{\vec{r}}$$

  Hierbei gilt $\beta > 0$ nach dem Hinweis.

  Die Richtung des elektrischen Feldes wurde willkürlich in x-Richtung festgelegt.

  Folglich erhält man für die Bewegungsgleichung:

  $$m\ddot{\vec{r}} = -\beta \dot{\vec{r}} + qE_0 \vec{e}_x \cos \omega t$$

- Lösen Sie die Bewegungsgleichungen unter der Bedingung, dass das Teilchen am Anfang ruht und sich im Ursprung eines Bezugssystems befindet.

  LÖSUNG:

  Da das Teilchen am Anfang ruhend im Ursprung befindet, folgt sofort aus der Bewegungsgleichung

  $$y = 0$$
  $$z = 0$$

  Für die Bewegung in x-Richtung erhält man folgende Differentialgleichung:

  $$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} = \frac{qE_0}{m}\cos \omega t$$

  Jede Lösung dieser Differentialgleichung kann als Summe einer speziellen, partikulären Lösung obiger Gleichung und einer Lösung der Gleichung für $E_0 = 0$ dargestellt werden.

  Zuerst soll die allgemeine Lösung der homogenen DGL bestimmt werden ($E_0 = 0$). Der Ansatz $x(t) = \exp(\lambda t)$ liefert hier die möglichen Werte für λ und damit die allgemeine Lösung:

  $$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -\frac{\beta}{m}$$
  $$x_{hom}(t) = A + B \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung soll die Differentialgleichung umgeschrieben werden zu

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} = \frac{qE_0}{m}\Re[\exp(-i\omega t)]$$

Interpretiert man x als Realteil einer komplexen Funktion z, so kann man auch die Differentialgleichung in folgender Form schreiben:

$$\ddot{z} + \frac{\beta}{m}\dot{z} = \frac{qE_0}{m}\exp(-i\omega t)$$

Diese Gleichung kann mit dem Ansatz $z(t) = C\exp(-i\omega t)$ für einen bestimmten Wert von C erfüllt werden:

$$-\omega^2 C - i\omega\frac{\beta}{m}C = \frac{qE_0}{m}$$

Die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung lautet daher:

$$x(t) = A + B\exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) + \Re\left[-\frac{qE_0}{i\omega\beta + m\omega^2}\exp(-i\omega t)\right], \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Berechnet man den Realteil explizit und setzt die Anfangsbedingungen ein, so folgt als Lösung der Bewegungsgleichung in x-Richtung:

$$\begin{aligned} x(t) &= A + B\exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) + \frac{qE_0}{m^2\omega^4 + \omega^2\beta^2}\left(-m\omega^2\cos\omega t + \omega\beta\sin\omega t\right) \\ &= \frac{qE_0 m}{m^2\omega^2 + \beta^2}\left(\exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) - \cos\omega t + \frac{\beta}{m\omega}\sin\omega t\right) \end{aligned}$$

- Diskutieren Sie das Ergebnis.

  LÖSUNG:

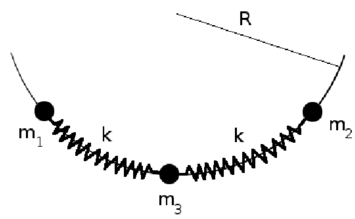
  Je größer die Dämpfung durch die Stokessche Reibung ist, um so größer ist die Phasendifferenz zwischen dem antreibenden elektrischen Feld und der Auslenkung. Im Grenzfall $\beta \to \infty$ wird diese Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$. Dies kann dadurch er klärt werden, dass für immer größer werdende Reibung die Masse immer schlechter der Änderung des Feldes folgen kann. Zu dem geht auch die Amplitude, wie aus der Gleichung gesehen werden kann, für $\beta \to \infty$ gegen null, sodass im unendlich zähen Medium die Masse gar nicht mehr bewegt werden kann.

Hinweis: Unter Stokesscher Reibung versteht man eine Kraft, die proportional zur Geschwindigkeit des Körpers ist und der Bewegungsrichtung entgegenwirkt.

Die Kraft eines elektrischen Feldes $\vec{E}$ auf ein geladenenes Teilchen der Ladung q ist gegeben durch $q\vec{E}$.

2 Drei Massen auf einem Zylindermantel

Drei Teilchen sind auf einem Zylindermantel mit dem Radius R gebunden. Die Zylinderachse ist senkrecht zu einem homogenen Gravitatationsfeld der Stärke $\vec{g}$ orientiert. Ferner können sich die Teilchen nur senkrecht zur Zylinderachse bewegen. Die Massen zweier Teilchen sind identisch und sind mit dem dritten über eine Feder mit der Federkonstanten k verbunden. Ferner ist es den Teilchen erlaubt sich zu durchdringen.



Beschreiben Sie das Problem mit dem Lagrangeformalismus und finden Sie die Normalmoden und die entsprechenden Schwingungsfrequenzen des Systems. Betrachten Sie hierbei nur den Fall, dass sich die Massen nahe am unteren Punkt befinden. Skizzieren Sie die Normalmoden.

LÖSUNG:

Im folgenden sollen die Achse eines kartesischen Koordinatensystems so orientiert werden, dass die Zylinderachse entlang der z-Achse und die Gravitation in negative y-Richtung zeigt. Die Position eines Teilchens ist daher durch die Koordinaten

$$(x_i, y_i) = R\left(\sin\left(\theta_i + \theta_i^{(0)}\right), 1 - \cos\left(\theta_i + \theta_i^{(0)}\right)\right)$$

gegeben. Hierbei wurde angenommen, dass der Ursprung des Koordinatensystems auf der Zylinderachse liegt. Der Winkel θ_i ist hierbei der Winkel zwischen der Gleichgewichtslage $\theta_i^{(0)}$ und dem Ortsvektor des i-ten Teilchens.

Zur Konstruktion einer Lagrangefunktion für dieses System soll zuerst die kinetische Energie der Teilchen bestimmt werden. Das mittlere Teilchen habe dazu die Masse M haben und die beiden äußeren die Masse m. Die kinetische Energie ergibt sich zu:

$$T = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta_1}^2 + R^2\dot{\theta_2}^2\right) + \frac{M}{2}R^2\dot{\theta_3}^2$$

Teilchen 1 und 2 sind hierbei die äußeren Teilchen. Die Potentielle Energie errechnet sich aus dem Abstand $R(\theta_i - \theta_j)$ zwischen den Teilchen. Da die äußeren Teilchen nur mit dem mittleren verbunden sind, folgt:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{kR^2}{2}\left((\theta_1-\theta_3)^2 + (\theta_2-\theta_3)^2\right) - mgR\left(\cos\left(\theta_1+\theta_1^{(0)}\right) + \cos\left(\theta_2+\theta_2^{(0)}\right) - 2\right) + MgR(1-\cos\left(\theta_3+\theta_3^{(0)}\right))\\
&\approx \frac{kR^2}{2}\left((\theta_1-\theta_3)^2 + (\theta_2-\theta_3)^2\right) + \frac{1}{2}mgR\left(\theta_1^2+\theta_2^2\right) + \frac{1}{2}MgR\theta_3^2 + const.
\end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion ist nun $\mathcal{L} = T - U$ und die Bewegungsgleichungen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
mR^2\ddot{\theta_1} &= -kR^2(\theta_1-\theta_3) - mgR\theta_1\\
mR^2\ddot{\theta_2} &= -kR^2(\theta_2-\theta_3) - mgR\theta_2\\
MR^2\ddot{\theta_3} &= -kR^2(2\theta_3-\theta_1-\theta_2) - MgR\theta_3
\end{aligned}$$

In Matrixform lauten diese Bewegungsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta_1}\\ \ddot{\theta_2}\\ \ddot{\theta_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k-\frac{mg}{R} & 0 & k\\ 0 & -k-\frac{mg}{R} & k\\ k & k & -2k-\frac{Mg}{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Der Ansatz $\theta_i = A_i\exp(-i\omega t)$ führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} k+\frac{mg}{R}-m\omega^2 & 0 & -k\\ 0 & k+\frac{mg}{R}-m\omega^2 & -k\\ -k & -k & 2k+\frac{Mg}{R}-M\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

Offenbar sind nur dann nicht-triviale Lösungen möglich, wenn die Matrix singulär wird. Dies ist beispielsweise dann erfüllt, wenn deren Determinante verschwindet. Nach einer entsprechenden Rechnung folgt, dass

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \frac{g}{R} + \frac{k}{m}\\
\omega_2^2 &= \frac{g}{R} + \frac{k}{m} + \frac{2k}{M}\\
\omega_3^2 &= \frac{g}{R}
\end{aligned}$$

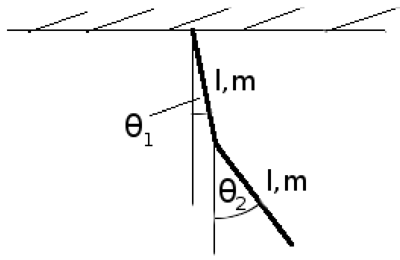
Die entsprechenden Eigenvektoren ergeben sich zu:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2m}{M} \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Normalmoden ergeben sich für ω_1 als Schwingung, bei der die äußeren Massen gegenphasig schwingen und die mittlere ruht, sowie ω_2 als Schwingung, bei der eine beide äußere Massen in Phase schwingen und die mittlere gegenphasig, und für ω_3 als gleichphasige Schwingung aller Teilchen.

3 Ebenes, physikalisches Doppelpendel

Zwei identische Stäbe der Masse m und der Länge l bilden ein physikalisches Doppelpendel, wie in nebenstehender Abbildung gezeigt. Beide Stäbe haben eine konstante Linienmassendichte. Ferner wirkt die Erdanziehungskraft der Stärke g nach unten und die Pendel werden durch einen Mechanismus gezwungen in einer Ebene zu schwingen. Ferner können Sie annehmen, dass $\theta_1^2 \ll 1$ und $\theta_2^2 \ll 1$ gilt.



- Wie lautet die Lagrangefunktion des Systems in den Koordinaten θ_1 und θ_2?

  LÖSUNG:

  Die kinetische Energie des ersten Stabes errechnet sich zu:

$$T_1 = \frac{1}{2}\int_0^l (r\dot{\theta}_1)^2 \frac{mdr}{l} = \frac{m}{6} l^2 \dot{\theta}_1^{\,2}$$

  Die Geschwindigkeit eines Punktes auf dem zweiten Stabes ist die Summe der Geschwindigkeit des Ende des ersten Stabes und der Geschwindigkeit relativ zu diesem Punkt:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}\int_0^l (l\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + r\dot{\theta}_2 \cos\theta_2)^2 + (l\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + r\dot{\theta}_2 \sin\theta_2)^2 \frac{m\ dr}{l} \\ &= \frac{m}{2} l^2 \left(\dot{\theta}_1^{\,2} + \frac{1}{3}\dot{\theta}_2^{\,2} + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) \end{aligned}$$

  Die potentiellen Energien der Stäbe ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{mgl}{2}\cos\theta_1 \\ V_2 &= -mgl\left(\cos\theta_1 + \frac{1}{2}\cos\theta_2\right) \end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion kann somit bestimmt werden zu:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= \frac{m}{2} l^2 \left(\frac{4}{3} \dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{3} \dot{\theta_2}^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) + \frac{3mgl}{2} \cos\theta_1 + \frac{mgl}{2} \cos\theta_2 \\ &\approx ml^2 \left(\frac{2}{3} \dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{6} \dot{\theta_2}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) - \frac{3mgl}{4} \theta_1^2 - \frac{mgl}{4} \theta_2^2 + const.\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die Frequenzen kleiner Oszillationen.

  LÖSUNG:

  Mit den Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen findet man die Bewegungsgleichungen für θ_1 und θ_2:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} ml^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} ml^2 \ddot{\theta}_2 &= -\frac{3mgl}{2} \theta_1 \\ \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} ml^2 \ddot{\theta}_1 &= -\frac{mgl}{2} \theta_2\end{aligned}$$

  Der Ansatz $\theta = A_i \exp(-i\omega t)$ führt auf die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3}\omega^2 - \frac{3}{2}\frac{g}{l} & \frac{1}{2}\omega^2 \\ \frac{1}{2}\omega^2 & \frac{1}{3}\omega^2 - \frac{1}{2}\frac{g}{l} \end{pmatrix} \vec{A} = 0$$

  Es gibt offenbar nur dann nicht-triviale Lösungen dieses Gleichungssystems, falls die Matrix singulär wird. Dies kann durch das Verschwinden der Determinate ausgedrückt werden. Man findet, dass dies genau für die Werte

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l} \left(3 \pm \frac{6}{\sqrt{7}} \right)$$

  der Fall ist. Die entsprechenden Lösungsvektoren sind:

$$\vec{A}_{1,2} = \begin{pmatrix} 3 \\ \pm 2\sqrt{7} - 1 \end{pmatrix}$$

  Die erste Normalmode repräsentiert eine gleichphasige Schwingung, die zweite eine Schwingung, bei der die Pendel um π außer Phase sind.

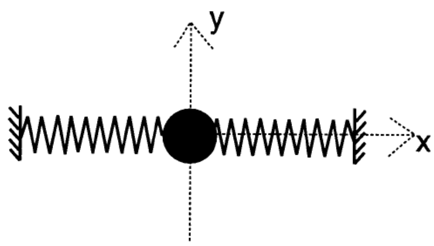
- Bestimmen und skizzieren Sie die Normalmoden.

  LÖSUNG:

  Siehe voheriger Aufgabenteil

4 Transversale Schwingung eines Teilchens

Ein kleines Teilchen der Masse m ist mit zwei identischen Federn mit der Federkostante k entlang der x-Achse verbunden (siehe Skizze). Die Ruhelänge der Federn sei l_0. Wenn die Federn und der Massenpunkt entlang der x-Achse ausgerichtet sind, sind die Federn auf eine Länge $l < l_0$ zusammengedrückt. Das Teilchen ist in der Bewegung auf die y-Achse eingeschränkt. Es wirken keine weiteren Kräfte.



- Bestimmen Sie die potentielle Energie des Systems als Funktion der Auslenkung y. Der Fall $y = 0$ soll dabei den Zustand vollständiger Ausrichtung entlang der x-Achse kennzeichnen. Entwickeln Sie das Ergebnis in eine Potenzreihe bis zur Ordnung y^4.

  Lösung:

  Offenbar erhält man die Länge der Federn mit dem Satz von Pythagoras. Damit kann die potentielle Energie in den Federn errechnet werden:

  $$U = k\left(\sqrt{l^2+y^2} - l_0\right)^2 \approx k(l-l_0)^2 - k\left(\frac{l_0}{l} - 1\right)y^2 + \frac{1}{4}\frac{kl_0}{l^3}y^4$$

- Nun wirkt auf das Teilchen eine hochfrequente Kraft der Form $\vec{F}(t) = -my_0\omega^2 \cos\omega t \vec{e}_y$ ein. Die Frequenz dieser Kraft sei sehr viel größer als die Schwingungsfrequenz des Teilchens, wenn die Kraft nicht anliegt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Teilchenposition auf. Führen Sie eine geeignete Näherung durch, die auf der sehr hohen Frequenz der Anregungskraft beruht.

  Hinweis: Mitteln Sie das Potential über mehrere Schwingungsperioden der externen Kraft und trennen Sie die Bewegung in einen niederfrequenten und einen hochfrequenten Anteil auf.

  Lösung:

  Die Bewegungsgleichung lautet:

  $$m\ddot{y} = -\frac{d}{dy}U(y) - my_0\omega^2\cos\omega t$$

  Mit der Substitution $s := y - y_0\cos\omega t$ führt dies auf die Bewegungsgleichung:

  $$m\ddot{s} = -\frac{d}{ds}U(s + y_0\cos\omega t)$$

  Nun soll nach Aufgabenstellung und Hinweis das Potential gemittelt werden. Mit den Beziehungen

  $$\begin{aligned}\left\langle (s+y_0\cos\omega t)^2\right\rangle &= s^2 + const.\\ \left\langle (s+y_0\cos\omega t)^4\right\rangle &= s^4 + \frac{6s^2y_0^2}{2} + const.\end{aligned}$$

  erhält man für die Bewegungsgleichung in s folgenden Ausdruck:

  $$m\ddot{s} = 2k\left(\frac{l_0}{l} - 1\right)s - \frac{1}{4}\frac{kl_0}{l^3}\left(4s^3 + 6y_0^2 s\right)$$

  Zusammengefasst und nach der Rücksubstitution findet man für y die Bewegungsgleichung:

  $$m\ddot{y} = \left(2k\left(\frac{l_0}{l} - 1\right) - \frac{3kl_0y_0^2}{2l^3}\right)(y - y_0\cos\omega t) - \frac{k_0l_0}{l^3}(y - y_0\cos\omega t)^3$$

- Bestimmen Sie ein effektives Potential für die vertikale Bewegung.

  Lösung:

  Aus voherigen Überlegungen folgt für das effektive Potential in der Variablen $s = y - y_0\cos\omega t$:

  $$U_{eff}(s) = \left(-k\left(\frac{l_0}{l} - 1\right) + \frac{3kl_0y_0^2}{4l^3}\right)s^2 + \frac{k_0l_0}{4l^3}s^4 = As^2 + Bs^4$$

- Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen der niederfrequenten Schwingung und geben Sie Stabilität und etwaige Frequenzen der Schwingung im Fall kleiner Auslenkungen aus diesen Gleichgewichtslagen an.

  Lösung:

Das effektive Potential für die niederfrequente Schwingung ist im letzten Aufgabenteil bestimmt worden. Die Gleichgewichtslagen werden durch die Bedingung $\frac{d}{ds}U_{eff}(s) = 0$ bestimmt und lauten:

$$s = 0 \;\vee\; s = \pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}$$

Zur Diskussion der Gleichgewichtslage $s = 0$: Im Falle $A > 0$ ist diese Lage stabil und dies ist gleichbedeutend mit

$$y_0^2 > \frac{4l^2(l_0 - l)}{3l_0}$$

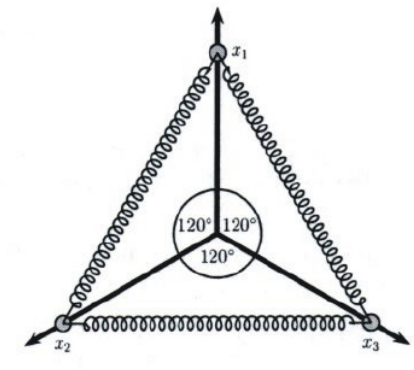
Die Schwingungsfrequenz beträgt dann:

$$\omega_1^2 = \frac{2A}{m} = \frac{-2k\left(\frac{l_0}{l} - 1\right) + \frac{3kl_0y_0^2}{2l^3}}{m}$$

Die Gleichgewichtslage bei $\pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}$ existiert nur im Falle $A < 0$. Die Schwingungsfrequenz ist hier:

$$\omega_2^2 = \frac{-A}{m}$$

5 Gekoppelte Perlen (Klausuraufgabe)



Drei punktförmige Perlen der Masse m bewegen sich reibungsfrei entlang drei idealisierter Drähte. Die Drähte liegen in einer Ebene und gehen vom Koordinatenursprung aus, wobei sie Winkel von $\frac{2\pi}{3}$ einschließen. Weiter sind die Perlen mit linearen Federn mit der Federkonstante k verbunden. Die natürliche Länge der Federn sei $\sqrt{3}l$, sodass sich die Ruhelage der Perlen jeweils im Abstand l vom Ursprung befindet. Diese Gleichgewichtslage wird nun gestört und die Körper oszillieren um die Auslenkungen aus der Ruhelage, x_1, x_2, x_3, und betrachten Sie kleine Auslenkungen $x_1, x_2, x_3 \ll l$, sodass in erster Näherung die Winkel zwischen den Drähten und den Federn als konstant betrachtet werden können.

- Geben Sie die Lagrange-Funktion des Systems an.

  Lösung:

  Das Vorzeichen der x_i soll so gewählt werden, dass positive Auslenkungen in die eingezeichnete Richtung zeigen sollen. Die kinetische Energie berechnet sich hiernach zu:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2\right)$$

  Zur Berechnung der potentiellen Energie ist die Länge einer Feder wichtig. Die Länge der Feder zwischen Masse 1 und 2 ist:

$$y_{12} = \sqrt{\left(l + x_1 + \frac{1}{2}(l + x_2)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(l + x_2)\right)^2} = \sqrt{(l + x_1)^2 + (l + x_2)^2 + (l + x_1)(l + x_2)}$$
$$\approx l\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 + x_2)$$

Die Längen der anderen Feder berechnet man analog. Folglich ergibt sich die potentielle Energie zu:

$$V = \frac{3k}{8}\left((x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (x_3+x_1)^2\right)$$

Damit lautet die Lagrangefunktion dieses Systems:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2\right) - \frac{3k}{8}\left((x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (x_3+x_1)^2\right)$$

- Leiten Sie aus der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichungen ab. Zeigen Sie, dass sie in der Form

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{3k}{4m} M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden können und geben Sie die Matrix M an.

LÖSUNG:

Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt aus obiger Lagrangefunktion das System von Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\frac{3k}{4}(2x_1 + x_2 + x_3) \\ m\ddot{x}_2 &= -\frac{3k}{4}(x_1 + 2x_2 + x_3) \\ m\ddot{x}_3 &= -\frac{3k}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3) \end{aligned}$$

Dieses System kann offenbar in die gewünschte Form mit der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gebracht werden.

- Lösen Sie die Bewegungsgleichung indem Sie das Eigenwertproblem $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ behandeln. Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ und berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_i$.

LÖSUNG:

Die Eigenwerte der Matrix M können aus der Lösung der Gleichung

$$\det(M - \lambda\mathbb{1}) = 0$$

bestimmt werden. Diese Gleichung kann dargestellt werden als

$$(4-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$$

Damit folgen die in der Aufgabenstellung angegebenen Eigenwerte. Die Eigenvektoren bestimmen sich zu:

$$\lambda_1 = 4,\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1,\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1,\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Ansatz $x_i = A_i \exp(-i\omega t)$ führt auf das Eigenwertproblem:

$$\left(\omega^2 - \frac{3k}{4m} M\right) \vec{A} = 0$$

Offenbar ergeben sich die möglichen Normalmoden wie folgt:

- $\omega^2 = \frac{3k}{m}$, $\vec{A} = (1, 1, 1)$: Gleichphasige Schwingung
- $\omega^2 = \frac{3k}{4m}$, $\vec{A} = (1, -1, 0)$: Zwei Massen schwingen, die dritte ruht.
- $\omega^2 = \frac{3k}{4m}$, $\vec{A} = (0, -1, -1)$: Zwei Massen schwingen, die dritte ruht.