Christoph Schnarr Blatt 3

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* – Frühjahr 2009

Schwingungssysteme

1 Gedämpfte Schwingungen mit Anregung

Ein Teilchen der Masse m und Ladung q bewege sich unter dem Einfluss Stokesscher Reibung in einem homogenen, harmonisch mit der Frequenz ω oszillierenden elektrischen Feld.

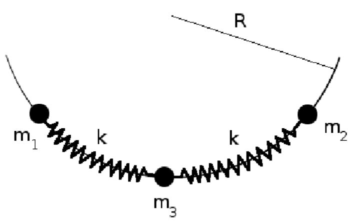
- Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Massepunkt auf.
- Lösen Sie die Bewegungsgleichungen unter der Bedingung, dass das Teilchen am Anfang ruht und sich im Ursprung eines Bezugssystems befindet.
- Diskutieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Unter Stokesscher Reibung versteht man eine Kraft, die proportional zur Geschwindigkeit des Körpers ist und der Bewegungsrichtung entgegenwirkt.

Die Kraft eines elektrischen Feldes $\vec{E}$ auf ein geladenenes Teilchen der Ladung q ist gegeben durch $q\vec{E}$.

2 Drei Massen auf einem Zylindermantel

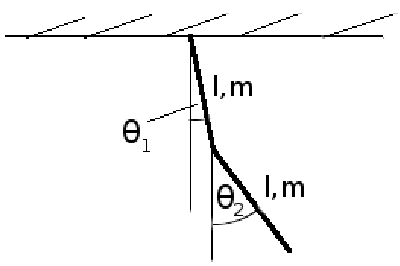
Drei Teilchen sind auf einem Zylindermantel mit dem Radius R gebunden. Die Zylinderachse ist senkrecht zu einem homogenen Gravitatationsfeld der Stärke $\vec{g}$ orientiert. Ferner können sich die Teilchen nur senkrecht zur Zylinderachse bewegen. Die Massen zweier Teilchen sind identisch und sind mit dem dritten über eine Feder mit der Federkonstanten k verbunden. Ferner ist es den Teilchen erlaubt sich zu durchdringen.



Beschreiben Sie das Problem mit dem Lagrangeformalismus und finden Sie die Normalmoden und die entsprechenden Schwingungsfrequenzen des Systems. Betrachten Sie hierbei nur den Fall, dass sich die Massen nahe am unteren Punkt befinden. Skizzieren Sie die Normalmoden.

3 Ebenes, physikalisches Doppelpendel

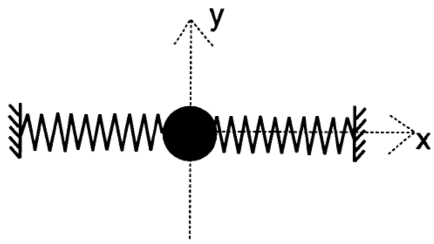
Zwei identische Stäbe der Masse m und der Länge l bilden ein physikalisches Doppelpendel, wie in nebenstehender Abbildung gezeigt. Beide Stäbe haben eine konstante Linienmassendichte. Ferner wirkt die Erdanziehungskraft der Stärke g nach unten und die Pendel werden durch einen Mechanismus gezwungen in einer Ebene zu schwingen. Ferner können Sie annehmen, dass $\theta_1^2 \ll 1$ und $\theta_2^2 \ll 1$ gilt.



- Wie lautet die Lagrangefunktion des Systems in den Koordinaten θ_1 und θ_2?
- Bestimmen Sie die Frequenzen kleiner Oszillationen.
- Bestimmen und skizzieren Sie die Normalmoden.

4 Transversale Schwingung eines Teilchens

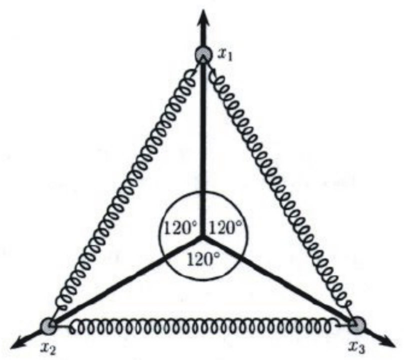
Ein kleines Teilchen der Masse m ist mit zwei identischen Federn mit der Federkostante k entlang der x-Achse verbunden (siehe Skizze). Die Ruhelänge der Federn sei l_0. Wenn die Federn und der Massenpunkt entlang der x-Achse ausgerichtet sind, sind die Federn auf eine Länge $l < l_0$ zusammengedrückt. Das Teilchen ist in der Bewegung auf die y-Achse eingeschränkt. Es wirken keine weiteren Kräfte.



- Bestimmen Sie die potentielle Energie des Systems als Funktion der Auslenkung y. Der Fall $y = 0$ soll dabei den Zustand vollständiger Ausrichtung entlang der x-Achse kennzeichnen. Entwickeln Sie das Ergebnis in eine Potenzreihe bis zur Ordnung y^4.
- Nun wirkt auf das Teilchen eine hochfrequente Kraft der Form $\vec{F}(t) = -my_0\omega^2 \cos\omega t\vec{e}_y$ ein. Die Frequenz dieser Kraft sei sehr viel größer als die Schwingungsfrequenz des Teilchens, wenn die Kraft nicht anliegt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Teilchenposition auf. Führen Sie eine geeignete Näherung durch, die auf der sehr hohen Frequenz der Anregungskraft beruht.

  Hinweis: Mitteln Sie das Potential über mehrere Schwingungsperioden der externen Kraft und trennen Sie die Bewegung in einen niederfrequenten und einen hochfrequenten Anteil auf.
- Bestimmen Sie ein effektives Potential für die vertikale Bewegung.
- Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen der niederfrequenten Schwingung und geben Sie Stabilität und etwaige Frequenzen der Schwingung im Fall kleiner Auslenkungen aus diesen Gleichgewichtslagen an.

5 Gekoppelte Perlen (Klausuraufgabe)



Drei punktförmige Perlen der Masse m bewegen sich reibungsfrei entlang drei idealisierter Drähte. Die Drähte liegen in einer Ebene und gehen vom Koordinatenursprung aus, wobei sie Winkel von $\frac{2\pi}{3}$ einschließen. Weiter sind die Perlen mit linearen Federn mit der Federkonstante k verbunden. Die natürliche Länge der Federn sei $\sqrt{3}l$, sodass sich die Ruhelage der Perlen jeweils im Abstand l vom Ursprung befindet. Diese Gleichgewichtslage wird nun gestört und die Körper oszillieren um die Auslenkungen aus der Ruhelage, x_1, x_2, x_3, und betrachten Sie kleine Auslenkungen $x_1, x_2, x_3 \ll l$, sodass in erster Näherung die Winkel zwischen den Drähten und den Federn als konstant betrachtet werden können.

- Geben Sie die Lagrange-Funktion des Systems an.

- Leiten Sie aus der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichungen ab. Zeigen Sie, dass sie in der Form
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right) = -\frac{3k}{4m} M \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right)$$
geschrieben werden können und geben Sie die Matrix M an.

- Lösen Sie die Bewegungsgleichung indem Sie das Eigenwertproblem $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ behandeln. Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ und berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_i$.