Ferienkurs *Theoretische Mechanik* 2009

Schwingungen

Vorlesungskript für den 11. Februar 2009

Christoph Schnarr

Inhaltsverzeichnis

1 Erzwungene Schwingungen

Viele Systeme wie zum Beispiel Pendel oder Moleküle können Schwingungen um eine Gleichgewichtslage herum ausführen. Wenn die Auslenkung aus der Ruhelage klein genug ist, kann man von harmonischen Schwingungen sprechen. Diese harmonischen Schwingungen sollen im Folgenden untersucht werden.

1.1 Eindimensionaler Fall

Zuerst soll der eindimensionale Fall einer Schwingung untersucht werden, hierbei seien dissipative und äußere Kräfte zugelassen.

1.1.1 Bewegungsgleichung

Wir betrachten hierzu ein System mit einem Freiheitsgrad und einer schwachen Störung:

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \frac{a(q)}{2}\dot{q}^2 - U(q) - U_{ext}(q,t) \tag{1}$$

Dabei ist U_{ext} eine schwache Störung, zum Beispiel ein äußeres elektromagnetisches Feld für ein Atom oder ein äußerer Antrieb für Schwingkörper.

Das ungestörte System ($U_{ext} = 0$) besitze eine stabile Gleichgewichtslage bei $q = q_0$ und wir entwickeln das Potential an dieser Stelle $q = q_0$:

$$U(q) = U(q_0) + (\partial_q U)_{q_0}(q-q_0) + \frac{1}{2}(\partial^2_{qq}U)_{q_0}(q-q_0)^2 + ... \tag{2}$$

Dabei ist $x = q - q_0$ die Auslenkung aus der Ruhelage. Da es sich um eine Gleichgewichtslage handelt, gilt $(\partial_q U)_{q_0} = 0$, sowie $(\partial^2_{qq}U)_{q_0} > 0$ da diese stabil ist. Wir brechen die Entwicklung also nach dem quadratischen Term ab:

$$U(q) \approx U(q_0) + \frac{1}{2}(\partial^2_{qq}U)_{q_0}(q-q_0)^2 = U(q_0) + \frac{k}{2}x^2 \tag{3}$$

Die kinetische Energie entwickeln wir ebenfalls bis zur quadratischen Ordnung in $x = q - q_0$:

$$T_{kin}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\left[a(q_0) + \left(\frac{da}{dq}\right)_0 x + ...\right]\dot{x}^2 \approx \frac{a(q_0)}{2}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \tag{4}$$

Nun entwickeln wir noch die Störung um die Gleichgewichtslage $x = 0$ des ungestörten Systems:

$$U_{ext}(q,t) = U_{ext}(q_0,t) + (\partial_q U_{ext})_{q_0}(q-q_0) + ... = U_{ext}(q_0,t) - F(t)x + ... \tag{5}$$

Damit ergibt sich die Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(x,\dot{x},t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 + F(t)x \tag{6}$$

Der Term $U_{ext}(t)$ wurde weggelassen, weil er nur von der Zeit abhängt und somit nicht in die Bewegungsgleichungen eingeht, da er nicht von den Koordinaten abhängt.

Dies ist die Lagrangefunktion des harmonischen Oszillators mit äußerer Kraft $F(t)$.
Mit Euler Lagrange folgt die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -kx + F(t)$ und mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ sowie $f(t) = \frac{F(t)}{m}$:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \tag{7}$$

Lässt man auch noch eine Reibungskraft zu, ergibt sich folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \tag{8}$$

1.1.2 Allgemeine Lösung

Für die allgemeine Lösung solcher Differentialgleichungen gilt:

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_{part}(t) \tag{9}$$

1.1.3 Lösung der homogenen Gleichung

Für die homogene Gleichung $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ machen wir den Ansatz:

$$x_{hom}(t) = Ce^{-i\nu t} \tag{10}$$

Dieser führt auf die Gleichung $-\nu^2 - 2i\lambda\nu + \omega_0^2 = 0$, die folgende zwei Lösungen besitzt:

$$\nu_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} - i\lambda = \pm w_0 - i\lambda \tag{11}$$

Hier müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

<u>1. Fall:</u> $\omega_0 > \lambda$

w_0 reell

$$\rightarrow x_{hom}(t) = Ae^{-\lambda t + iw_0 t} + Be^{-\lambda t - iw_0 t} = e^{-\lambda t}[A' \sin(w_0 t) + B' \cos(w_0 t)]$$

Dies ist eine gedämpfte, periodische Bewegung, welche auch mit einer Amplitude und einer Phase geschrieben werden kann:

$$x_{hom}(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(w_0 t + \alpha) \tag{12}$$

<u>2.Fall:</u> $\omega_0 < \lambda$

Es ergibt sich:

$$x_{hom}(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t} \tag{13}$$

mit $\lambda_{1,2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

<u>3. Fall:</u> $\omega_0 = \lambda$

Dieser Fall ist der aperiodische Grenzfall, die beiden Lösungen sind entartet:

$$x_{hom}(t) = (A + Bt)e^{-\lambda t} \tag{14}$$

Beim aperiodischen Grenzfall erfolgt die Annäherung an die Ruhelage besonders schnell.

1.1.4 Lösung der inhomogenen Gleichung, partikuläre Lösung

Da man jede beliebige externe Kraft mittels Fouriertransformation in periodische Bestandteile zerlegen kann, reicht es hier externe Kräfte der Form $F(t) = F_\omega \cos\omega t$ zu betrachten.

Noch einfacher betrachten wir die Gleichung

$$\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_\omega}{m}\exp(i\omega t) \tag{15}$$

und nehmen am Ende den Realteil der Lösung.

Der Ansatz $y_{part}(t) = f_\omega \chi(\omega)\exp(i\omega t)$ ergibt:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega} \tag{16}$$

Die Funktion $\chi(t)$ bezeichnet man als dynamische Suszeptibilität.

Wir diskutieren im Folgenden eine periodische Kraft $f(t) = f_\omega \exp(i\omega t)$ für den Fall $\lambda < \omega_0$. Hierzu drückt man die komplexwertige Funktion $\chi(t)$ durch Betrag und Phase aus:

$$\chi = |\chi(\omega)| \exp(i\delta(\omega))$$

Es folgt dann mit dem zuvor gefundenen $\chi(t)$:

$$|\chi(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \qquad \tan\delta(\omega) = \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{17}$$

Für die periodische Kraft ist die allgemeine Lösung:

$$x(t) = A_0 \exp(-\lambda t)\cos(w_0 t + \delta_0) + A(\omega)\cos(\omega t + \delta(t))$$

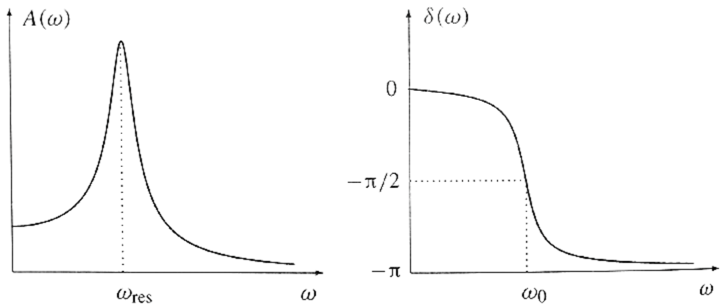
mit

$$A(\omega) = f_\omega |\chi(\omega)|$$

Die Konstanten A_0 und δ_0 werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt und für große Zeiten ist die Lösung von diesen unabhängig ($\rightarrow$ exp!):

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega))$$

Diese Lösung beschreibt also die durch die äußere Kraft erzwungene Schwingung im eingeschwungenen Zustand, wobei Amplitude und Phase durch ω, ω_0 und λ festgelegt sind.



Obenstehende Abbildung zeigt den Verlauf der Amplitude $A(\omega)$ und der Phasenverschiebung $\delta(\omega)$ in Abhängigkeit der Freuquenz ω.
Man kann leicht erkennen, dass der Oszillator für kleine Frequenzen in Phase mit der anregenden Kraft schwingt. Für große Frequenzen schwingt er gegenphasig.
Das Maximum der Amplitude liegt bei der Resonanzfrequenz ω_{res}:

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

2 Gekoppelte Oszillatoren

In diesem Kapitel sollen Schwingungen eines Systems untersucht werden, welches viele Freiheitsgrade besitzt. Wir bestimmen letztendlich die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen des Systems aus der Lagrangefunktion.

2.1 Anschauliche Betrachtung mit Newton

Zum grundsätzlichen Verständnis der behandelten Problematik soll mit einem bekannten Beispiel begonnen werden.
Man betrachte eine lineare Kette aus 3 Atomen der Masse m, die mit gleichen Federn der Federkonstanten k verbunden sind. Die Federn sind bei der Länge b entspannt. Mit Newton lassen sich die Bewegungsgleichungen schreiben als:

$$m\ddot{q}_1 = k(q_2 - q_1 - b) \tag{18}$$

$$m\ddot{q}_2 = k(q_3 - q_2 - b) - k(q_2 - q_1 - b) \tag{19}$$

$$m\ddot{q}_3 = k(q_2 - q_3 + b) \tag{20}$$

Mit den Koordinaten $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, die die Auslenkung aus der Ruhelage beschreiben, ergibt dies in Matrixschreibweise:

$$m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ddot{\vec{x}} + k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = 0 \tag{21}$$

Man erkennt hier ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem, welches es zu lösen gilt.

Wie man ein derartiges Gleichungssystem zuerst systematisch herleiten und dann lösen kann, soll im Folgenden besprochen werden.

2.2 Betrachtungen mit Lagrange

Wir betrachten ein System mit f Freiheitsgraden, welches die verallgemeinerten Koordinaten $q_1, ..., q_f$ besitzt. Die Lagrangefunktion hat dann die Form:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(q_1, ..., q_f, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_f) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{f} m_{ij}(q_1, ..., q_f)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q_1, ..., q_f) \tag{22}$$

Das System habe bei $q_1^0, ..., q_f^0$ eine stabile Gleichgewichtslage. Wenn man um diese analog zum eindimensionalen Fall entwickelt, erhält man folgende Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(x_1, ..., x_f, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_f) \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{f} [T_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - V_{ij}x_ix_j] \tag{23}$$

Hierbei wurde $x_i = q_i - q_i^0$ eingesetzt und die Koeffizienten mit den

$$T_{ij} = T_{ji} = m_{ij}(q_1^0, ..., q_f^0)$$

abgekürzt. Für V_{ij} gilt:

$$V_{ij} = V_{ji} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$$

V_{ij} und T_{ij} sind hierbei reelle Konstanten, die symmetrisch bezüglich Vertauschung von i und j sind.
Die Lagrangegleichungen lauten:

$$\sum_{j=1}^{f} T_{ij}\ddot{x}_j = -\sum_{j=1}^{f} V_{ij}x_j \tag{24}$$

Zur leichteren Schreibweise führen wir die symmetrischen Matrizen T und V und den Vektor $\vec{x}$ ein:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1f} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{f1} & T_{f2} & \cdots & T_{ff} \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1f} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{f1} & V_{f2} & \cdots & V_{ff} \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_f \end{pmatrix}$$

Damit lassen sich die Bewegungsgleichungen in der Form

$$T\ddot{\vec{x}} + V\vec{x} = 0 \tag{25}$$

schreiben.

Diese Bewegungsgleichungen sind ein System von f linearen, homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Deshalb kann man einen Ansatz folgender Form machen:

$$\vec{x}(t) = \vec{A}\exp(i\omega t) \tag{26}$$

Wir lösen das Problem erst im Komplexen und gehen am Ende zur gesuchten, reellen Lösung über, in dem wir den Realteil nehmen:

$$\vec{x}(t) \to \Re(\vec{x}(t))$$

Die Lösung lässt sich auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem zurückführen:

$$\left(V - \omega^2 T\right)\vec{A} = 0 \tag{27}$$

Damit das System eine nichttriviale Lösung besitzt, muss die Determinante verschwinden:

$$\det\left(V - \omega^2 T\right) = P^{(f)}(\omega^2) = 0 \tag{28}$$

Das Polynom $P^{(f)}$ ist von Grad f in ω^2 mit reellen Koeffizienten und besitzt somit f Nullstellen:

$$P^{(f)}(\omega^2) = 0 \qquad \to \qquad \omega_1^2, \omega_2^2, ..., \omega_f^2 \tag{29}$$

Aufgrund der zuvor angenommen Stabilität der Gleichgewichtslage folgt:

$$\omega_i^2 \geq 0$$

Die f Wurzeln der Eigenwerte ω_i werden als Eigenfrequenzen des Systems bezeichnet. Für die ω_i müssen nun noch die Eigenvektoren $\vec{A}_i$ gesucht werden, um damit die Normalschwingungen zu definieren.
Angenommen, es gelte:

$$\omega_i > 0 \quad \text{und} \quad \omega_i \neq \omega_j \;\; \text{für} \;\; i \neq j$$

Dann gibt es für jedes ω_i eine Eigenschwingung, sodass sich die Lösung schreiben lässt als:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{f} C_k \vec{A}_k \exp\left(i\omega_k t\right) \tag{30}$$

Ist ein $\omega_i = 0$, so kommt es zu keiner Schwingung und für die Lösung zu diesem Eigenwert ist folgendes zu verwenden:

$$\vec{x} = \vec{A}_i\left(at + b\right) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{31}$$

Wenn eine Eigenfrequenz ω_k mehrfach vorkommen, so ist die Methode für $\omega_i = 0$ analog zu verwenden, wobei dann noch der Faktor $\exp(i\omega_k t)$ zu beachten ist, da es sich ja sehr wohl um eine Schwingung handelt.

Die Gesamtlösung für das Problem ist der Realteil der gefundenen, allgemeinen Lösung $\vec{x}(t)$, die sich als Summe aus den Beiträgen der einzelnen Normalschwingungen und den eventuellen Translationen zusammensetzt.

2.2.1 Beispiel

Für das Problem der 3 mit Federn gekoppelten Massen mit Auslenkungen x aus der Ruhelage ergibt sich mit

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{k}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2]$$

und

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right)$$

aus der Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ schließlich folgendes Gleichungssystem:

$$m\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ddot{\vec{x}} + k\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\vec{x} = 0 \tag{32}$$

Dies ist identisch mit der Herleitung nach den Newtonschen Überlegungen.

In der Schreibweise der theoretischen Herleitung bedeutet dies:

$$T = \begin{pmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m\end{pmatrix}$$

und

$$V = \begin{pmatrix}k & -k & 0\\ -k & 2k & -k\\ 0 & -k & k\end{pmatrix}$$

Die Matrizen T und V lassen sich hierbei aus obenstehendem Gleichungssystem ablesen oder aber aus der Definition von T_{ij} und V_{ij} bestimmen.

Das Eigenwertproblem liefert über $\det(V - \omega^2 T) = 0$ die Eigenfrequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \qquad \omega_3 = 0 \tag{33}$$

und folgende mögliche Eigenvektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \tag{34}$$

Damit folgt für die (reellen) Eigenschwingungen:

$$\vec{x}_1 = C_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right) \tag{35}$$

$$\vec{x}_2 = C_2\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \varphi_2\right) \tag{36}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}(C_3 \cdot t + C_4) \tag{37}$$

Diese Eigenschwingungen sind bis auf je zwei Konstanten bestimmt, welche sich aus den Anfangsbedingungen ergeben.