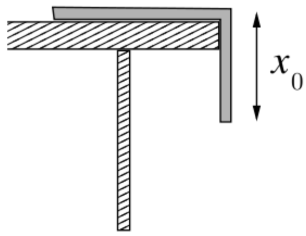
Ahmed Omran

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* – Frühjahr 2009

Lagrange–Mechanik (Lösungen)

1 Abrutschendes Seil (*)

Ein Seil der Länge l und der konstanten Längenmassendichte λ rutscht nach dem Loslassen ohne Reibung über eine Tischkante herunter. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie sie mit den Anfangsbedingungen:



$$x(0) = x_0 \qquad 0 < x_0 < l$$
$$\dot{x}(0) = 0$$

Lösung

Die x-Achse zeigt in diesem Fall vertikal nach oben. Aus der konstanten Massendichte erhält man für die Energien:

$$T = \frac{\lambda l}{2}\dot{x}^2$$
$$V = -\lambda g \int_0^x x' \mathrm{d}x' = \frac{-\lambda g x^2}{2}$$

Für die Lagrange-Funktion gilt demnach:

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda l}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{g}{l}x^2\right)$$

Die Bewegungsgleichung ergibt sich dann aus:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \lambda l \ddot{x} - \lambda g x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} - \frac{g}{l}x = 0$$

Mit dem Ansatz $x(t) = A \cdot e^{\beta t}$ kommt man auf die Lösung:

$$x(t) = A_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} + A_2 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

Die Anfangsbedingungen liefern: $A_1 = A_2 = \frac{x_0}{2}$ und damit:

$$\underline{x(t) = x_0 \cdot \frac{e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} + e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}}{2} = x_0 \cdot \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)}$$

2 Magnetisches Feld (**)

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q bewegt sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$. Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{q}{2}\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{r} \times \vec{B})$$

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen der kartesischen Koordinaten aus der Lagrange-Funktion.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen anhand von kartesischen Koordinaten für die Anfangsbedingungen $\dot{\vec{r}}(0) = v_0\vec{e}_x$ und $\vec{r}(0) = \frac{mv_0}{qB}\vec{e}_y$

Lösung

a) Die Lagrange-Funktion kann man in kartesischen Koordinaten folgendermaßen schreiben:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{q}{2}\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i(\vec{r} \times \vec{B})_i$$

Mit der Identität $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$ schreibt man die zweite Summe um:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) + \frac{q}{2}\sum_{i=1}^{3} x_i(\dot{\vec{r}} \times \vec{B})_i$$

Für die kartesischen Koordinaten x_i $(i = 1, 2, 3)$ gilt die Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\dot{x}_i - \frac{q}{2}(\vec{r} \times \vec{B})_i\right] - \frac{q}{2}(\dot{\vec{r}} \times \vec{B})_i = 0$$

$$m\ddot{x}_i - q(\dot{\vec{r}} \times \vec{B})_i = 0$$

Oder in Vektorform:

$$\Rightarrow \underline{m\ddot{\vec{r}} = q\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right)}$$

Dies ist einfach die Newton'sche Gleichung für die Lorentzkraft.

Mit der Bedingung $\vec{B} = B\vec{e}_z$bekommen wir: $\begin{cases} \ddot{x} - \frac{qB}{m}\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{qB}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$

b) In der obigen Bewegungsgleichung ersetzen wir $\dot{\vec{r}}$ durch $\vec{v}$, und $\frac{qB}{m}$ durch ω.

$$\begin{cases} \dot{v}_x - \omega v_y = 0 \\ \dot{v}_y + \omega v_x = 0 \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_y = \frac{\ddot{v}_x}{\omega} \\ \ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0 \\ v_z = const. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \\ v_y = -a\sin\omega t + b\cos\omega t \\ v_z = v_z(0) \end{cases}$$

a und b sind Integrationskonstanten. Mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0\vec{e}_x$ gilt dann:

$$\begin{cases} v_x(0) = a = v_0 \\ v_y(0) = b = 0 \\ v_z(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0\cos\omega t \\ v_y = -v_0\sin\omega t \\ v_z = 0 \end{cases}$$

Integriert man diese drei Gleichungen mit der Anfangsbedingung $\vec{r}(0) = \frac{v_0}{\omega}\vec{e}_y$ folgt für die kartesischen Koordinaten:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + x(0) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega}\cos\omega t + C = \frac{v_0}{\omega}\cos\omega t \\ z(t) = z(0) = 0 \end{cases}$$

Dies entspricht einer geschlossenen Kreisbahn um die z-Achse herum.

3 Symmetrien und Erhaltungssätze (**)

Welche Komponenten des Impulses $\vec{p}$ und des Drehimpulses $\vec{M}$ bleiben bei der Bewegung in den Gravitationsfeldern der folgenden Körpern erhalten?

a) Unendliche homogene Ebene

b) Unendliches homogenes Zylinder

c) Unendliches homogenes Prisma

d) Zwei Punkte

e) Unendliche homogene Halbebene

f) Homogener Kegel

g) Homogener Kreisring

h) Unendliche homogene Schraubenlinie (Rechnung erforderlich)

Lösung

a) Bei der xy-Ebene ist die Lagrange-Funktion invariant unter Verschiebungen in x- und $y-$Richtung, sowie unter Drehungen um die z-Achse. Damit sind p_x, p_y und M_z Erhaltungsgrößen.

b) Für die z-Achse als Zylindeachse sind p_z und M_z erhalten.

c) Wenn die Kanten des Prismas entlang der z-Achse verlaufen, ist p_z erhalten.

d) Wenn beide Punkte auf der z-Achse liegen, bleibt M_z erhalten.

e) Wenn die Halbebene in der xy-Ebene liegt und von der y-Achse begrenzt wird, bleibt p_y erhalten.

f) Wenn die Kegelachse in z-Richtung verläuft, bleibt M_z erhalten.

g) Wenn die Achse des Kreisringes in z-Richtung verläuft, bleibt M_z erhalten.

h) Die Schraubenlinie habe die Ganghöhe h. Die Lagrange-Funktion bleibt bei einer Drehung um die Achse der Schraubenlinie um $\delta\phi$ und einer gleichzeitigen Verschiebung längs der Achse um $\frac{h}{2\pi}\delta\phi$ unverändert. Eine beliebige Variation der Lagrange-Funktion in der Form lautet:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi$$

Zusammen mit den Definitionen der kanonischen Impulse $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}\right) = \frac{d}{dt}p_z$ und $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) = \frac{d}{dt}M_z$ und den oben genannten Variationen, die $\mathcal{L}$ invariant lassen, erhält man:

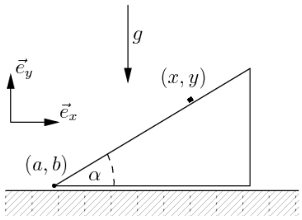
$$\left(\dot{p}_z\frac{h}{2\pi} + \dot{M}_z\right)\delta\phi = 0$$

Da dies für beliebige Variationen $\delta\phi$ gelten soll, bekommt man als Erhaltungsgröße

$$\frac{h}{2\pi}p_z + M_z = \text{const.}$$

4 Masse auf schiefer Ebene 1 (Klausuraufgabe) (**)

Ein Massenpunkt (Masse m) gleite reibungsfrei unter dem Einfluss der konstanten Schwerkraft g auf einer schiefen Ebene (Masse M, Neigungswinkel α), die selbst entlang der Horizontalen reibungsfrei gleiten kann.



Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf, sowie die Lagrange-Funktion in unabhängigen generalisierten Koordinaten, und bestimmen Sie die Beschleunigung der schiefen Ebene in x-Richtung.

Lösung

Wir haben folgende Zwangsbedingungen:

$$(i) b = 0$$
$$(ii) \tan\alpha = \frac{y-b}{x-a} \quad \Leftrightarrow \quad y - b = (x-a)\tan\alpha$$

Sie sind holonom skleronom, und die Gewichtskraft konservativ $\Rightarrow$ Lösung über Lagrange-Gleichung 2. Art.

Geeignete generalisierten Koordinaten:

$$q_1 = a \qquad q_2 = l = \frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}$$

l ist somit die Länge entlang der schiefen Ebene.

Mit $x = l\cos\alpha + a$ und $y = l\sin\alpha$ gilt:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}\dot{a}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \\ &= \frac{M}{2}\dot{a}^2 + \frac{m}{2}\left((\dot{l}\cos\alpha)^2 + 2\dot{l}\dot{a}\cos\alpha + \dot{a}^2 + (\dot{l}\sin\alpha)^2\right) \\ &= \underline{\frac{M+m}{2}\dot{a}^2 + \frac{m}{2}\dot{l}^2 + m\dot{l}\dot{a}\cos\alpha} \end{aligned}$$

$$V = mgy = \underline{mgl\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathcal{L} = \frac{M+m}{2}\dot{a}^2 + \frac{m}{2}\dot{l}^2 + m\dot{l}\dot{a}\cos\alpha - mgl\sin\alpha}$$

Für beide Koordinaten werden die Lagrange-gleichungen aufgestellt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{a}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a} = (M+m)\ddot{a} + m\ddot{l}\cos\alpha - 0 = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{l}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial l} = m\ddot{l} + m\ddot{a}\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0$$

Die erste Gleichung lösen wir nach $m\ddot{l}$ auf, und setzen sie in die zweite Gleichung ein.

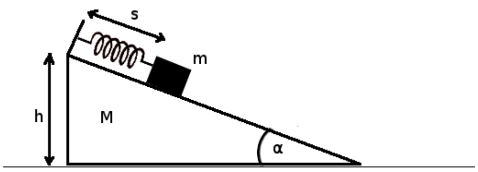
$$m\ddot{a}\cos\alpha + mg\sin\alpha - \frac{(M+m)}{\cos\alpha}\ddot{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{a}\left(m\cos\alpha - \frac{(M+m)}{\cos\alpha}\right) = \ddot{a}\left(\frac{m(\cos^2\alpha - 1) - M}{\cos\alpha}\right) = -mg\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\ddot{a} = \frac{m\sin\alpha\cos\alpha}{m\sin^2\alpha + M}\cdot g}$$

5 Masse auf schiefer Ebene 2 (**)

Eine Masse m ist an einem Keil mit Masse M durch eine Feder (Federkonstante k) verbunden. Der Keil hat einen Neigungswinkel von α und kann sich reibungsfrei entlang der horizontalen Ebene bewegen.



a) Für die Ruhelänge der Feder von d (ohne Masse), berechnen Sie die Länge der Feder s_0 falls die Masse und der Keil beide in Ruhe sind.

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems in Abhängigkeit der x-Koordinaten des Keils und der Federlänge s auf und ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen.

c) Ermittlen Sie eine zyklische Koordinate und die dazugehörige Erhaltungsgröße.

Lösung

a) Wenn die Masse m in Ruhe ist, verschwindet die Summe der Kräfte parallel zur schiefen Ebene

$$mg\sin\alpha - k(s_0 - d) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_0 = \frac{mg\sin\alpha}{k} + d$$

b) Sei die Höhe des Keils gleich h. Verwendet man als generalisierte Koordinaten x und s, so hat die Masse m die kartesischen Koordinaten

$$(x + s\cos\alpha;\ h - s\sin\alpha)$$

Daraus kann man die Geschwindigkeit und damit auch die kinetische Energie bestimmen:

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left[(\dot{x} + \dot{s}\cos\alpha)^2 + (\dot{s}\sin\alpha)^2\right]$$

Die potentielle Energie setzt sich aus Lageenergie von m, sowie Spannenergie der Feder zusammen

$$V = \frac{k}{2}(s-d)^2 + mg(h - s\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T - V = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left[(\dot{x} + \dot{s}\cos\alpha)^2 + (\dot{s}\sin\alpha)^2\right] - \frac{k}{2}(s-d)^2 - mg(h - s\sin\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \underline{(M+m)\ddot{x} + m\ddot{s}\cos\alpha = 0}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = \underline{m\ddot{x}\cos\alpha + m\ddot{s} + ks - (kd + mg\sin\alpha) = 0}$$

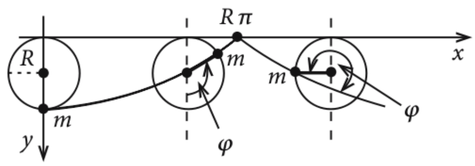
c) Die Lagrange-Funktion hängt nicht von x ab, daher ist x zyklisch. Damit ist der dazu konjugierte Impuls p_x eine Erhaltungsgröße. Dieser ist aber **nicht** der kinematische Impuls $p = (M+m)\dot{x}$, sondern:

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\dot{s}\cos\alpha = \text{const.}$$

wie man aus der ersten Bewegungsgleichung bereits erkennt.

6 Zykloidenpendel (**)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Schwerefeld auf einer Zykloide. Diese wird durch Abrollen eines Rades (Radius R) auf einer ebenen Fläche realisiert. Sie besitzt die folgende Parameterdarstellung:



$$
\begin{aligned}
x &= R(\varphi + \sin\varphi) \\
y &= R(1 + \cos\varphi) \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi
\end{aligned}
$$

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf.

b) Berechnen Sie $\frac{d^2 u}{dt^2}$ für $u = \sin\frac{\varphi(t)}{2}$

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung in φ für die Masse.

Lösung

a) Die kinetische Energie beträgt

$$
\begin{aligned}
T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) &= \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\right) \\
&= \frac{mR^2}{2}\left(2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) \\
&= mR^2\dot{\varphi}^2(1 + \cos\varphi)
\end{aligned}
$$

Die potentielle Energie lautet:

$$V = -mgy = -mgR(1 + \cos\varphi)$$

Damit lautet die Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} = T - V = mR(1 + \cos\varphi)\left(R\dot{\varphi}^2 + g\right)$$

b)

$$\frac{d}{dt}\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\dot{\varphi}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\ddot{\varphi}}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{\dot{\varphi}^2}{4}\sin\frac{\varphi}{2}$$

c) Die Bewegungsgleichung lautet:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= \frac{d}{dt}\left(2mR^2(1 + \cos\varphi)\dot{\varphi}\right) + mR\sin\varphi\left(R\dot{\varphi}^2 + g\right) \\
&= 2mR^2\left(\ddot{\varphi}(1 + \cos\varphi) - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) + mR\sin\varphi\left(R\dot{\varphi}^2 + g\right) \\
&= 2mR^2\ddot{\varphi}(1 + \cos\varphi) + mR\sin\varphi\left(g - R\dot{\varphi}^2\right) = 0
\end{aligned}
$$

Hier kann man ein paar Vereinfachungen einführen, mit $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$ und $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

$$
\begin{aligned}
4mR^2\ddot{\varphi}\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2mR\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left(g - R\dot{\varphi}^2\right) = 0 \\
\Rightarrow \quad 2\ddot{\varphi}\cos\frac{\varphi}{2} - \dot{\varphi}^2\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{g}{R}\sin\frac{\varphi}{2} = 0
\end{aligned}
$$

Mit dem Ergebnis aus b) wird diese Gleichung noch weiter vereinfacht:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{g}{4R}\sin\frac{\varphi}{2} = 0$$

Dies ist bei näherer Betrachtung eine Schwingungsgleichung für $\sin\frac{\varphi}{2}$ mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{g}{4R}$. Aufgelöst nach $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = 2\arcsin\left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right)$$

Die Parameter A und B können durch geeignete Anfangsbedingungen festgelegt werden.