Ahmed Omran

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* – Frühjahr 2009

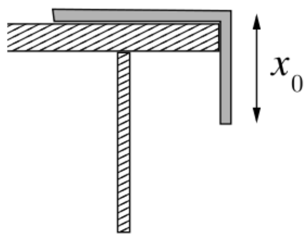
Lagrange–Mechanik

Aufgaben für Dienstag

1 Abrutschendes Seil (*)

Ein Seil der Länge l und der konstanten Längenmassendichte λ rutscht nach dem Loslassen ohne Reibung über eine Tischkante herunter. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie sie mit den Anfangsbedingungen:

$$x(0) = x_0 \qquad 0 < x_0 < l$$
$$\dot{x}(0) = 0$$



2 Magnetisches Feld (**)

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q bewegt sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$. Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{q}{2}\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{r} \times \vec{B})$$

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen der kartesischen Koordinaten aus der Lagrange-Funktion.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen anhand von kartesischen Koordinaten für die Anfangsbedingungen $\dot{\vec{r}}(0) = v_0\vec{e}_x$ und $\vec{r}(0) = \frac{mv_0}{qB}\vec{e}_y$

3 Symmetrien und Erhaltungssätze (**)

Welche Komponenten des Impulses $\vec{p}$ und des Drehimpulses $\vec{M}$ bleiben bei der Bewegung in den Gravitationsfeldern der folgenden Körpern erhalten?

a) Unendliche homogene Ebene

b) Unendliches homogenes Zylinder

c) Unendliches homogenes Prisma

d) Zwei Punkte

e) Unendliche homogene Halbebene

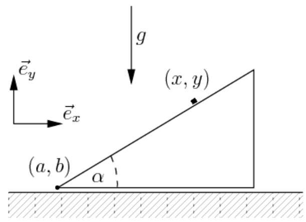
f) Homogener Kegel

g) Homogener Kreisring

h) Unendliche homogene Schraubenlinie (Rechnung erforderlich)

4 Masse auf schiefer Ebene 1 (Klausuraufgabe) (**)

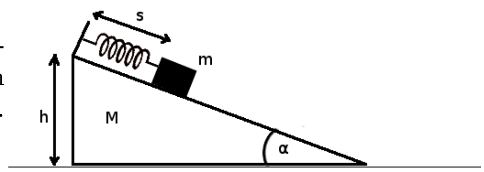
Ein Massenpunkt (Masse m) gleite reibungsfrei unter dem Einfluss der konstanten Schwerkraft g auf einer schiefen Ebene (Masse M, Neigungswinkel α), die selbst entlang der Horizontalen reibungsfrei gleiten kann.



Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf, sowie die Lagrange-Funktion in unabhängigen generalisierten Koordinaten, und bestimmen Sie die Beschleunigung der schiefen Ebene in x-Richtung.

5 Masse auf schiefer Ebene 2 (**)

Eine Masse m ist an einem Keil mit Masse M durch eine Feder (Federkonstante k) verbunden. Der Keil hat einen Neigungswinkel von α und kann sich reibungsfrei entlang der horizontalen Ebene bewegen.



a) Für die Ruhelänge der Feder von d (ohne Masse), berechnen Sie die Länge der Feder s_0 falls die Masse und der Keil beide in Ruhe sind.

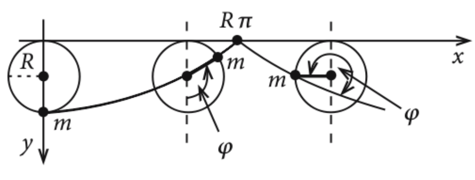
b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems in Abhängigkeit der x-Koordinaten des Keils und der Federlänge s auf und ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen.

c) Ermittlen Sie eine zyklische Koordinate und die dazugehörige Erhaltungsgröße.

6 Zykloidenpendel (**)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Schwerefeld auf einer Zykloide. Diese wird durch Abrollen eines Rades (Radius R) auf einer ebenen Fläche realisiert. Sie besitzt die folgende Parameterdarstellung:

$$x = R(\varphi + \sin\varphi)$$
$$y = R(1 + \cos\varphi) \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf.

b) Berechnen Sie $\frac{d^2u}{dt^2}$ für $u = \sin\frac{\varphi(t)}{2}$

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung in φ für die Masse.