

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* 2009

Lagrange-Mechanik

Vorlesungskript für den 10. Februar 2009

Ahmed Omran

Inhaltsverzeichnis

1 Lagrange-Formulierung der Mechanik	2
1.1 Zwangsbedingungen	2
1.2 Generalisierte Koordinaten	3
1.3 D'Alembert-Prinzip	3
1.4 Lagrange-Gleichungen 2. Art	4
2 Noether-Theorem	8
3 Hamilton'sches Variationsprinzip	8

1 Lagrange-Formulierung der Mechanik

In der Newton'schen Mechanik haben wir Systeme betrachtet, wo sich Teilchen prinzipiell durch den ganzen zugrunde liegenden Raum bewegen konnten. In vielen realen Fällen ist dies nicht realisierbar, und viele Bewegungen unterliegen Einschränkungen. Deshalb brauchen wir einen neuen Zugang, um solche Probleme zu lösen.

1.1 Zwangsbedingungen

In jedem System kann man sogenannten Freiheitsgrade angeben, deren Anzahl festlegt, wie viele unabhängige Größen das System charakterisieren können. Freie Massenpunkte haben z.B. jeweils drei Freiheitsgrade in der Bewegung.

Es gibt jedoch Systeme, wo die Bewegungen der verschiedenen Massen einigen Nebenbedingungen unterliegen, welche die Freiheitsgrade einschränken. Diese Nebenbedingungen heißen Zwangsbedingungen und verursachen Zwangskräfte auf die Massen.

Eine holonome Zwangsbedingung in einem System von N Teilchen ist diejenige, die man durch eine stetige Funktion der folgenden Form schreiben kann:

$$A(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (1)$$

Beispiele dafür sind Massen, die sich nur auf einer bestimmten Höhe bewegen können ($z_i - c = 0$, s. Abbildung unten), oder zwei Massen die durch eine Stange auf einen festen Abstand zueinander gehalten werden ($|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - d = 0$). Unsere Betrachtungen werden wir ab jetzt ausschließlich auf holonome Zwangsbedingungen beschränken.

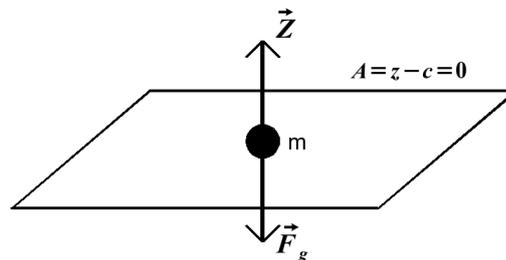
Zwangsbedingungen, die explizit von der Zeit abhängen heißen rheonom, zeitunabhängige Zwangsbedingungen nennt man dagegen skleronom.

Nicht-holonome Zwangsbedingungen sind solche, die von der Geschwindigkeit der Massen abhängen, oder die nur in Form einer Ungleichung geschrieben werden können, z.B. bei einem Teilchen, das sich nur innerhalb eines Kugelvolumens mit Radius R bewegen kann ($|\vec{r}| - R \leq 0$).

Jede holonome Zwangsbedingung reduziert die Anzahl der Freiheitsgrade jeweils um 1 (Offensichtlich lässt sich diese Aussage über nicht-holonomen Zwangsbedingungen nicht treffen). Bei einem System von N Teilchen und k holonomen Zwangsbedingungen haben wir somit $(3N - k)$ Freiheitsgrade.

Eine solche Zwangsbedingung A_i definiert eine Fläche mit konstantem Wert. Es ist naheliegend, dass die zugehörige Zwangskraft senkrecht auf diese Fläche steht, sprich sie ist proportional zum Gradienten von A_i

$$\vec{Z}_i = \lambda_i(t) \cdot \vec{\nabla} A_i(\vec{r}, t) \quad (2)$$



Eine Masse auf horizontaler Fläche mit eingezeichneter Gewichtskraft und Zwangskraft

Die glatt angenommene Funktion λ_i ist zeitabhängig, weil die Zwangskraft variabel sein kann. Die Kraft auf eine Masse setzt sich also aus allen angelegten Kräften und allen Zwangskräften zusammen. Konkret, mit zwei holonomen Zwangsbedingungen A_1 und A_2 :

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_i \vec{F}_i + \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 = \sum_i \vec{F}_i + \lambda_1(t) \cdot \vec{\nabla} A_1(\vec{r}, t) + \lambda_2(t) \cdot \vec{\nabla} A_2(\vec{r}, t) \quad (3)$$

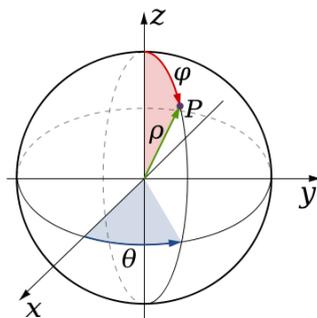
1.2 Generalisierte Koordinaten

Um mechanische Systeme zu beschreiben, ist es oft sinnvoll, sich von den üblichen kartesischen Koordinaten zu verabschieden, und sogenannte generalisierte Koordinaten q_i zu verwenden, die nicht unbedingt die Dimension einer Länge haben müssen. Die zeitliche Änderung dieser Koordinaten \dot{q}_i bezeichnet man als generalisierte Geschwindigkeiten. Kennt man zu jedem Zeitpunkt gleichzeitig jede Koordinate und ihre Geschwindigkeit, so ist das System vollständig beschrieben. Grundsätzlich hat man genauso viele unabhängige Koordinaten wie Freiheitsgrade, egal wie sie gewählt sind.

Es gibt immer eine Transformation zwischen den kartesischen und den generalisierten Koordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, \dots, q_n, t) \\ &\vdots \\ \vec{r}_N &= \vec{r}_N(q_1, \dots, q_n, t) \end{aligned}$$

z.B. die Transformation von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten bei festem Radius ρ :



Kugelkoordinaten-Transformation

$$x(\rho, \varphi, \theta, t) = \rho \cdot \sin \varphi(t) \cdot \cos \theta(t)$$

$$y(\rho, \varphi, \theta, t) = \rho \cdot \sin \varphi(t) \cdot \sin \theta(t)$$

$$z(\rho, \varphi, \theta, t) = \rho \cdot \cos \varphi(t)$$

1.3 D'Alembert-Prinzip

Wir betrachten nun ein System mit einer holonomen Zwangsbedingung $A(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$. Dazu definieren wir virtuelle Verrückungen $\delta\vec{r}_i$, infinitesimale Veränderungen der Systemkonfiguration mit folgenden Eigenschaften:

- Sie erfolgen bei feststehender Zeit ($\delta t = 0$).
- Sie sind mit der Zwangsbedingung verträglich. Dazu müssen diese Verrückungen tangential zur Fläche stehen, die von der Zwangsbedingung festgelegt wird:

$$\delta\vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^N \delta\vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i A = 0 \quad (4)$$

Setzt man die Definition der Zwangskraft ein ($\vec{Z}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \propto \vec{\nabla}_i A(\vec{r}, t)$), erhält man:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0} \quad (5)$$

Dies ist das D'Alembert-Prinzip, ein wichtiger Satz der Mechanik, der sowohl das 2. Newton'sche Axiom beinhaltet, sowie alle Bedingungen, die an die Zwangskräfte gestellt werden. Insbesondere verrichten die Zwangsbedingungen keine virtuelle Arbeit. Sind sie *zeitunabhängig*, verrichten sie gar keine Arbeit.

1.4 Lagrange-Gleichungen 2. Art

Die einfachste Methode, ein System zu beschreiben, ist die generalisierten Koordinaten so zu wählen, dass sie den Zwangsbedingungen automatisch genügen. Sie sind dann in der Regel unabhängig voneinander, und beschreiben jeweils nur einen Freiheitsgrad.

Die virtuelle Verrückung kartesischer Koordinaten wird analog zum totalen Differential definiert:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (6)$$

Beachte: Der Term $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \delta t$ entfällt, weil nur die räumlichen Koordinaten variiert werden, und nicht die Zeit. Mit diesen Definitionen stellen wir die virtuelle Arbeit auf:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (7)$$

An dieser Stelle führe wir die sog. generalisierten Kräfte ein:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (8)$$

Nach wie vor gilt: Die generalisierten Kräfte müssen nicht die Dimension einer Kraft, aber $Q_j \delta q_j$ die Dimension einer Arbeit haben, denn aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (9)$$

Ferner:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \quad (10)$$

Mithilfe der Produktregel der Differentiation schreibt man:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \quad (11)$$

In der ersten Summe kann in der Ableitung $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ im Zähler und Nenner gleichzeitig die Zeitableitungspunkte hinzufügen. Kurzer Beweis:

$$\dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \quad \blacksquare \quad (13)$$

Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \quad (14)$$

Nochmalige Anwendung des gleichen Tricks mit der Produktregel:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{r}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{r}_i^2 \right] \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j\end{aligned}$$

Vom D'Alembert-Prinzip und der Definition von generalisierten Kräften ausgehend, folgt:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (15)$$

Wegen der Unabhängigkeit aller Koordinaten q_i muss der Klammerterm verschwinden. Dies führt zur Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0 \quad (16)$$

Für konservative Kräfte $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$ schreiben wir die generalisierten Kräfte um:

$$Q_\alpha = - \sum_i \vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (17)$$

⇒ Die Kräfte Q_i haben ebenfalls ein Potential. Aus der Lagrange-Gleichung folgt dann:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) = 0 \quad (18)$$

Der Grund warum man im ersten Term ohne weiteres $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}$ abziehen kann, ist dass die potentielle Energie nicht von irgendeiner Geschwindigkeit \dot{q}_i abhängt, sprich $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$. An dieser Stelle führen wir die Lagrange-Funktion \mathcal{L} ein,

$$\boxed{\mathcal{L} := T - V} \quad (19)$$

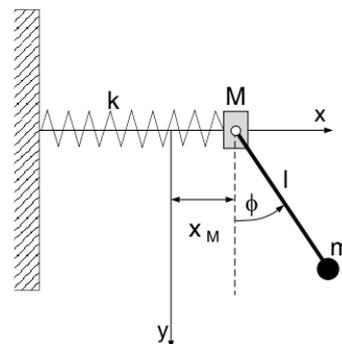
die alle Informationen über die Dynamik des Systems trägt. Damit haben wir eine der wichtigsten Gleichungen der theoretischen Mechanik erreicht: Die *Lagrange-Gleichung 2. Art*, bzw. die *Euler-Lagrange-Differentialgleichung*:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0} \quad (20)$$

Der große Vorteil dieser Differentialgleichung ist, dass man daraus die Bewegungsgleichungen der Koordinaten q_i leicht ermitteln kann, ohne sich dabei Gedanken über die Zwangskräfte zu machen, da sie bereits eliminiert wurden. An folgendem Beispiel wird demonstriert, wie man aus dieser Differentialgleichung schrittweise zu den gesuchten Bewegungsgleichungen kommt:

Beispiel 1: Pendel

Eine Masse M ist durch eine masselose Feder mit Federkonstante k mit einer Wand verbunden. M kann sich nur horizontal entlang der x -Achse bewegen. Die Koordinate x_M bezeichne die Abweichung der Position von M von der Ruhelage der Feder. An der Masse M sei ein ebenes Fadenpendel angebracht, bestehend aus einer Masse m , die mit einem masselosen Stab der Länge l befestigt sei. Die Masse m kann sich nur in der x - y -Ebene bewegen. Bestimme die Lagrange-funktion und daraus die Bewegungsgleichungen der beiden Massen.



Vorgehensweise zur Lösung

1. Geeignete generalisierte Koordinaten q_i anhand der Zwangsbedingungen festlegen

Zwei Zwangsbedingungen können schonmal aufstellen: Sowohl die Masse M als auch m können sich nicht in z -Richtung bewegen. Dazu kann sich M nicht in y -Richtung bewegen, und m hat einen konstanten Abstand l zu M . Mit vier holonomen Zwangsbedingungen bleiben nur zwei Freiheitsgrade übrig: Es bieten sich also x_M und ϕ als Koordinaten an.

2. Potentielle und Kinetische Energie des gesamten Systems berechnen, ausgedrückt in den q_i

Die Koordinaten der beiden Massen lauten:

$$\text{Masse } M: \quad x_1 = x_M \quad y_1 = 0$$

$$\text{Masse } m: \quad x_2 = x_M + l \cdot \sin \phi \quad y_2 = l \cdot \cos \phi$$

Die kinetische Energie vom gesamten System lautet demnach:

$$\begin{aligned} T = T_M + T_m &= \frac{M}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{M}{2} \dot{x}_M^2 + \frac{m}{2} \left[(\dot{x}_M + l\dot{\phi} \cdot \cos \phi)^2 + (-l\dot{\phi} \cdot \sin \phi)^2 \right] \\ &= \frac{M}{2} \dot{x}_M^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_M^2 + m\dot{x}_M l\dot{\phi} \cdot \cos \phi + \frac{m}{2} (l\dot{\phi})^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\ &= \frac{M+m}{2} \dot{x}_M^2 + \frac{m}{2} (l\dot{\phi})^2 + m\dot{x}_M l\dot{\phi} \cdot \cos \phi \end{aligned}$$

Die gesamte potentielle Energie beträgt:

$$V = V_M + V_m = \frac{k}{2} x_1^2 + mgy_2 = \frac{k}{2} x_M^2 - mgl \cos \phi$$

3. Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = T - V$ aufstellen und in die Euler-Lagrange-Gleichung für jede Koordinate einzeln einsetzen

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{M+m}{2} \dot{x}_M^2 + \frac{m}{2} (l\dot{\phi})^2 + m\dot{x}_M l\dot{\phi} \cdot \cos \phi - \frac{k}{2} x_M^2 + mgl \cdot \cos \phi$$

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_M} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_M} = 0$
 $\frac{d}{dt} \left[(M+m) \dot{x}_M + ml\dot{\phi} \cos \phi \right] + kx_M = (M+m) \ddot{x}_M + ml\ddot{\phi} \cos \phi - ml\dot{\phi}^2 \sin \phi + kx_M = 0$
- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
 $\frac{d}{dt} \left(ml^2 \dot{\phi} + ml\dot{x}_M \cos \phi \right) - (-ml\dot{x}_M \dot{\phi} \sin \phi - mgl \sin \phi) =$
 $= ml^2 \ddot{\phi} + ml\ddot{x}_M \cos \phi - ml\dot{x}_M \dot{\phi} \sin \phi + ml\dot{x}_M \dot{\phi} \sin \phi + mgl \sin \phi =$
 $= ml^2 \ddot{\phi} + ml\ddot{x}_M \cos \phi + mgl \sin \phi = 0$

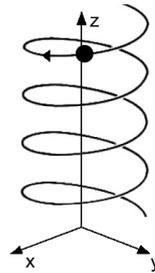
Somit lauten die gesuchten Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} (M + m) \ddot{x}_M + ml\ddot{\phi} \cos \phi - ml\dot{\phi}^2 \sin \phi + kx_M &= 0 \\ \ddot{x}_M \cos \phi + l\ddot{\phi} + g \sin \phi &= 0 \end{aligned}$$

Wichtig: Für viele Aufgabenstellungen reicht die Aufstellung der Bewegungsgleichung aus! Oft sind diese gar nicht analytisch lösbar. Man muss also schauen, ob *nur* die Bewegungsgleichung gefragt ist, oder auch die explizite Lösung.

Beispiel 2: Perle auf Schraubenlinie

Eine Perle gleitet reibungsfrei auf einer Schraubenlinie mit Radius R . Die Gravitationskraft der Erde wirkt in negative z -Richtung. Stelle die Bewegungsgleichung auf und integriere sie
(Anfangsbedingungen: $\dot{\phi}(0) = \phi(0) = 0$, $z(0) = h$)



Wir gehen bei der Betrachtung von Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) aus. Es gibt hier zwei holonome Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} r &= R = \text{const} \\ z &= h - a\phi \end{aligned}$$

wobei der Parameter a davon abhängt, wie steil die Schraubenlinie ist. Daraus folgt nur ein Freiheitsgrad für die Bewegung.

Die kinetische und potentielle Energie der Perle lauten:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (z^2 + (R\dot{\phi})^2) = \frac{m}{2} (a^2 + R^2) \dot{\phi}^2 \\ V &= mgz = mg(h - a\phi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{m}{2} (a^2 + R^2) \dot{\phi}^2 - mg(h - a\phi) \quad (21)$$

Eingesetzt in die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = m(a^2 + R^2) \ddot{\phi} + mga = 0 \quad (22)$$

Daraus folgt für die Beschleunigung entlang ϕ :

$$\ddot{\phi} = \frac{-ga}{(a^2 + R^2)}$$

Im Gegensatz zum Problem davor lässt sich diese Bewegungsgleichung sehr einfach mit den gegebenen Anfangsbedingungen integrieren:

$$\phi(t) = \frac{-ga}{2(a^2 + R^2)} \cdot t^2 + \underbrace{\dot{\phi}(0)}_{=0} \cdot t + \underbrace{\phi(0)}_{=0} = \frac{-ga}{2(a^2 + R^2)} \cdot t^2$$

Will man eine Bewegungsgleichung für z (die aufgrund des einen Freiheitsgrads von der einen linear abhängig ist) kann man den Zusammenhang zwischen ϕ und z verwenden:

$$z(t) = h - a\phi(t) = h - \frac{ga^2}{2(a^2 + R^2)} \cdot t^2 = h - \frac{g}{2 \left(1 + \left(\frac{R}{a}\right)^2\right)} \cdot t^2$$

2 Noether-Theorem

Zu jeder Koordinaten q_i definiert man zunächst den konjugierten oder kanonischen Impuls p_i :

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

Beispiele hierfür wären der gewöhnliche Impuls, der Drehimpuls, etc.. Eine Koordinate heißt zyklisch, falls die Lagrange-Funktion nicht von dieser Koordinaten abhängt

$$q_i \text{ zyklisch} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Aus der Euler-Lagrange-Gleichung folgert man sofort für deren konjugierten Impuls:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{const.}$$

Damit gilt: *Jede* zyklische Koordinate führt auf eine Erhaltungsgröße. Über Erhaltungsgrößen lässt sich ebenfalls folgender fundamentaler Satz formulieren, der einige mechanische Betrachtungen deutlich vereinfachen kann:

Noether-Theorem: Zu jeder Transformation, die die Lagrange-Funktion nicht verändert (kontinuierliche Symmetrie), gehört eine Erhaltungsgröße und umgekehrt.

Zum Beispiel folgt die Energieerhaltung aus Invarianz der Lagrange-Funktion unter zeitlicher Translation ($\mathcal{L}(t + \delta t) = \mathcal{L}(t)$), aus Invarianz unter räumlicher Translation folgt Impulserhaltung und aus Invarianz unter räumlichen Drehungen folgt Drehimpulserhaltung.

3 Hamilton'sches Variationsprinzip

Die Euler-Lagrange-Gleichung lässt sich aus einem viel allgemeineren Prinzip ableiten, das nicht nur in der Mechanik seine Verwendung findet, sondern auch bei der Quantentheorie und manche Feldtheorien. Zu jedem mechanischen System definiert man über die gesamte Bahn der Bewegung ein Funktional \mathcal{S} , das man Wirkung nennt.

$$\mathcal{S} := \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (i = 1, \dots, f) \quad (23)$$

Dabei bekommt ein Funktional eine Funktion (hier \mathcal{L}) als Argument bildet sie auf eine Zahl ab. Das *Hamilton'sche Prinzip*, bzw. *Prinzip der kleinsten Wirkung* besagt, dass ein mechanisches System sich immer so weiterentwickelt, dass die Wirkung *stationär* ist (z.B. minimal). In anderen Worten: Jede realisierbare Bewegung kann nur durch eine Lagrange-Funktion \mathcal{L} beschrieben werden, für die \mathcal{S} stationär wird. Ähnlich der Definition von Extremalpunkten verschwindet damit jede Variation von \mathcal{S} :

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, f) \quad (24)$$

(Warum dies gelten muss ist nicht einfach zu beweisen und würde den Rahmen sprengen. Der Beweis über Bewegungen in zweidimensionalen Ebenen geht auf Leonhard Euler zurück.) Gesucht sind jedenfalls die Funktionen \mathcal{L} , bzw. die Bahnen $q_i(t)$ und $\dot{q}_i(t)$ für die diese Relation gilt.

Wir betrachten nun eine Bewegung zwischen t_1 und t_2 . Die einzige Voraussetzung die wir für eine wohldefinierte Bewegung fordern, ist dass $q(t_1)$, $q(t_2)$, $\dot{q}(t_1)$ und $\dot{q}(t_2)$ festgelegt, und nicht variiert werden. Was dazwischen passieren soll, untersuchen wir im Folgenden:

Die „totale Variation“ der Lagrangefunktion lautet:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \underbrace{\delta t}_{=0} \quad (25)$$

Zu diesem Term stellen wir das variierte Wirkungsintegral auf. Da das Integral absolut konvergent ist, kann man Integration und Summation vertauschen:

$$0 = \delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \quad (26)$$

Partielle Integration des zweiten Summanden liefert:

$$\delta\mathcal{S} = \sum_{i=1}^n \left[\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \quad (27)$$

Da $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, nach Voraussetzung, fällt der zweite Term raus.

$$0 = \delta\mathcal{S} = \sum_{i=1}^n \left[\int_{t_1}^{t_2} dt \delta q_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \quad (28)$$

Da die Variation von \mathcal{S} mit jeder beliebigen Variation δq_i verschwinden muss, kann nur noch der Klammerterm gleich Null sein:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0} \quad (29)$$

Somit haben wir die Euler-Lagrange-Differentialgleichung auf allgemeinstem Weg reproduziert, ohne Rücksicht auf Zwangsbedingungen oder eine geeignete Wahl der Koordinaten q_i zu nehmen. Die Lösung der Differentialgleichung für jeden Freiheitsgrad liefert wie bisher die Bewegungsgleichung der entsprechenden Koordinaten.