Sebastian Konopka Blatt 1

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* – Frühjahr 2009

Newtonsche Mechanik und das Keplerproblem (Lösungen)

1 Koordinatensysteme

1.1 Kugelkoordinaten (**)

In vielen rotationssymmetrischen Problemen sind Kugelkoordinaten sehr nützlich. Die Kugelkoordinaten sind mit den kartesischen Koordinaten über die Koordinatentransformation

$$\Psi : [0,\infty) \times [0,\pi] \times S^1 \to \mathbb{R}^3$$
$$\Psi(r,\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$$

verknüpft.

- Bestimmen Sie die natürliche Basis der Kugelkoordinaten und daraus eine orthonormierte Basis $\{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi}\}$.

  LÖSUNG:

  Die natürliche Basis eines Koordinatensystems ist definiert als $\{\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_i}\}_{i=1,2,3}$, wobei ξ_i die Koordinaten bezeichnet. Im obigen Fall erhält man also:

  $$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) =: \vec{e_r}$$
  $$\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, -r\sin\theta) =: r\vec{e_\theta}$$
  $$\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = (-r\sin\theta\sin\phi, r\sin\theta\cos\phi, 0) =: r\sin\theta\vec{e_\phi}$$

  Obige Definition von $\{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi}\}$ liefert eine Orthonormalbasis, wie man leicht nachrechnet.

- Drücken Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und die Beschleunigung $\vec{a}$ in Kugelkoordinaten aus.

  Hinweis: Betrachten Sie eine Bahn im Parameterraum $(r,\theta,\phi)(t)$ und bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung durch Differentiation des Zusammenhangs $\vec{r}(t) = \Psi(r(t),\theta(t),\phi(t))$. Beachten Sie, dass die kartesische Basis nicht von der Zeit abhängt.

  LÖSUNG:

  Aus dem Zusammenhang $\vec{r}(t) = \Psi(r(t),\theta(t),\phi(t))$ und der Wahl der orthonormierten Basis aus dem vorangegangenen Aufgabenteil findet man schnell $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e_r}$. Hierbei ist zu beachten, dass der verwendete Basisvektor implizit von den Variablen $\theta(t)$ und $\phi(t)$ abhängt, wie aus der Definition von $\vec{e_r}$ ersichtlich wird.

Es sollen nun die zeitlichen Ableitungen der Einheitsvektoren bestimmt werden. Mit etwas Rechenaufwand findet man unter zur Hilfenahme der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e_r}} &= \dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{\phi}\sin\theta\vec{e_\phi}\\ \dot{\vec{e_\theta}} &= -\dot{\theta}\vec{e_r} + \dot{\phi}\cos\theta\vec{e_\phi}\\ \dot{\vec{e_\phi}} &= -\dot{\phi}\left(\sin\theta\vec{e_r} + \cos\theta\vec{e_\theta}\right)\end{aligned}$$

Es folgt also:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\vec{e_\phi}\\ \vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\vec{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e_\theta} + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\right)\vec{e_\phi}\end{aligned}$$

- Interpretieren Sie die Differenz $\ddot{r}(t)\vec{e_r} - \ddot{\vec{r}}(t)$.

  LÖSUNG:

  Befindet sich ein Beobachter im Ursprung und bewegt seine Koordinatenachsen so, dass $\theta(t)$ den Winkel zwischen seiner x-Achse und der z-Achse und $\phi(t)$ der Winkel zwischen seiner x-Achse und der $x-z$-Ebene ist, so beschreibt der Vektor $r(t)\vec{e_r} = \vec{r}(t)$ die Position des Teilchens, dass sich auf der Bahn $\vec{r}(t)$ bewegt.

  Im Bezugssystem des Beobachters befindet sich das Teilchen jedoch stets auf der x-Achse. Würde er, unter der Annahme, dass sein Bezugssystem ein Inertialsystem ist, versuchen über die Beschleunigung, gemessen in seinem Bezugssystem, die Kraft, die auf das Teilchen wirkt, zu bestimmen, so wäre dies $m\ddot{r}(t)\vec{e_r}$. Tatsächlich ist dies aber $m\ddot{\vec{r}}(t)$. Die Differenz beschreibt also eine Scheinkraft, die auf das Teilchen aus der Sicht des rotierten Beobachter wirkt, real, also in einem Inertialsystem aber nicht existiert.

1.2 Parabolische Koordinaten (*)

Bei manchen Problemen mit parabelförmigen Strukturen ist es vorteilhaft sogenannte *Parabolische Koordinaten* einzuführen. Im folgenden soll nur der zweidimensionale Fall untersucht werden. Die parabolischen Koordinaten sind mit den kartesischen auf folgende Art und Weise verknüpft:

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2_+$$

$$\Psi^{-1}(x,y) = (\sqrt{r+x}, \sqrt{r-x})$$

Hierbei ist $r = \sqrt{x^2+y^2}$ der kartesische Abstand des Punktes (x,y) vom Ursprung.

- Interpretieren Sie die Koordinaten $(u,v) = \Psi^{-1}(x,y)$.

  LÖSUNG:

  Zuerst soll die Abbildung Ψ bestimmt werden. Durch Auflösen nach x und y des angegebenen Zusammenhanges findet man:

  $$\Psi(u,v) = (\frac{u^2-v^2}{2}, uv)$$

  Jetzt soll das Verhalten der Koordinatentransformation auf den (u,v)-Koordinatensachsen bestimmt werden. Dazu sei $v > 0$ konstant gegeben. Durch einfaches Einsetzen findet man folgende Form für die transformierte u-Achse:

  $$x = \frac{y^2}{2v^2} - \frac{v^2}{2}$$

  Es handelt sich also um eine zur positiven x-Richtung hin geöffnete Parabel. Im Fall $v = 0$ erhält man die positive x-Achse.

Analog findet man für die v-Achsen nach unten geöffnete Parabelen.

Die Interpretation soll anhand eines Beispiels erfolgen: Man stelle sich einen parabelförmigen Berg vor. Ein Teilchen kann sich nur auf dessen Oberfläche bewegen. Diese Nebenbedingung kann in parabolischen Koordinaten kurz durch beispielsweise $u = const.$ ausgedrückt werden.

Eine Anwendung für diese Art von Koordinaten ergibt sich in der Atomphysik. Betrachtet man ein zweidimensionalen Wasserstoff, so kann durch Einführen obiger Koordinaten das System in ein System zweier harmonischer Oszillatoren entkoppelt werden.

- Bestimmen Sie die natürliche Basis von Ψ und eine orthonormierte Basis $\{\vec{e_u}, \vec{e_v}\}$.

  LÖSUNG:

  Man findet das Ergebnis auf analoge Weise zur ersten Aufgabe:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = (u, v) =: \sqrt{u^2 + v^2}\vec{e_u}$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} = (-v, u) =: \sqrt{u^2 + v^2}\vec{e_v}$$

  Die ebenen definierten Vektoren $\{\vec{e_u}, \vec{e_v}\}$ bilden eine Orthonormalbasis für die parabolischen Koordinaten.

2 Kraftfelder

2.1 Konservative Kraftfelder (**)

Entscheiden Sie jeweils, ob das angegebene Kraftfeld konservativ ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential. Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang einer beliebigen Kreislinie um den Ursprung bzw. im dreidimensionalen Fall entlang einer Kreislinie, die in einer Ebene liegt, die den Ursprung enthält. Skizzieren Sie die Felder.

- $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2)\vec{e_x} + (x^2 + z^2)\vec{e_y} + (x^2 + y^2)\vec{e_z}$

  LÖSUNG:

  Es gilt

$$\text{rot } \vec{F} = 2(y - z)\vec{e_x} + 2(z - x)\vec{e_y} + 2(x - y)\vec{e_z} \neq 0$$

  Also ist das Feld nicht konservativ. Eine Kreislinie ist $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0),\ \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$. Es folgt:

$$\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} = 0$$

- $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(\vec{r}) = r^{-5}\left(3(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{a}r^2\right)$

  LÖSUNG:

  Man rechnet leicht nach, dass

$$\vec{F} = -\text{grad}\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

  ist. Also ist $\vec{F}$ konservativ. Daher ist jedes Integral entlang einer geschlossenen Kurve 0.

- $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(\vec{r}) = m\gamma\vec{r}r^{-2}$

  LÖSUNG:

  Es gilt

$$\vec{F} = m\gamma\text{grad } \log(r/r_0)$$

  Das Feld ist dennoch nicht konservativ, da der Definitionsbereich nicht einfach wegzusammenhängend ist. Dennoch verschwindet beispielsweise das Integral entlang des Einheitskreises.

- $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3,\ \vec{F}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}\left(\cos\phi\vec{e_r} - \tan\theta\cos\phi\sin\phi\vec{e_\theta} + (1-r^2)\vec{e_\phi}\right)$ Hier braucht kein Kurvenintegral berechnet werden.

  Hinweis: Der Rotationsoperator in Kugelkoordinaten ist gegeben durch:

  rot $\vec{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\phi\sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\phi}$

  LÖSUNG:

  Die Rotation in radialer Richtung dieses Feldes ist gegeben durch:

  $$\text{rot } \vec{F}\cdot\vec{e_r} = \frac{\cos(\theta)^2(1-r^2) - \sin(\theta) + 2\sin(\theta)\cos(\phi)^2}{r^2\sin(\theta)\cos(\theta)} \neq 0$$

  Also ist das Feld nicht konservativ.

- $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2,\ \vec{F}(r,\phi) = \frac{1}{r}\vec{e_\phi}$

  LÖSUNG:

  Zwar gilt auf jeder einfach wegzusammenhängenden Teilmenge des $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

  $$\vec{F} = \text{grad } \phi$$

  Allerdings gilt für ein Integral entlang des positiven Einheitskreises γ:

  $$\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} = 2\pi \neq 0$$

  Also ist das Kraftfeld nicht konservativ.

Im folgenden bewege sich ein Teilchen in einem Wirbelfeld der Form

$$\vec{F}(r,\phi,z) = m\frac{A}{r}\vec{e_\phi}$$

- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten auf.

  LÖSUNG:

  Man findet folgende Bewegungsgleichungen:

  $$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = 0$$
  $$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{A}{r}$$

- Untersuchen Sie das System auf stabile Kreisbahnen.

  LÖSUNG:

  Angenommen, das Teilchen bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius $r_0 > 0$. Dann gilt $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Also folgt aus der ersten Bewegungsgleichung $\dot{\phi} = 0$. Allerdings folgt aus der zweiten Gleichung $\ddot{\phi} = Ar_0^{-2}$.

  Im Falle $A \neq 0$ können daher keine stabilen Kreisbahnen existieren. Der Fall $A = 0$ ist trivial und führt zu keiner Bewegung mit $r = const.$ und $\vec{r} \neq 0$.

- Welche Arbeit wird an dem Teilchen verrichtet, wenn es sich auf auf einer Kreisbahn mit Radius r_0 um den Ursprung bewegt? Diskutieren Sie das Ergebnis.

  LÖSUNG:

  Die Arbeit ist definiert als

  $$W = \int \vec{F}d\vec{r}$$

  Mit dem Ergebnis letzten Kraftfeldaufgabe folgt:

  $$W = 2\pi mA$$

- Berechnen Sie den Drehimpuls in z-Richtung in Abhängigkeit von der Zeit.

  LÖSUNG:

  Multipliziert man die zweite Bewegungsgleichung mit r, so erhält man:

  $$\dot{l_z} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\right) = mA$$

  Offenbar folgt durch Integration über t:

  $$l_z(t) = mAt + mr(0)^2\dot{\phi}(0)$$

2.2 Bewegung im Feld einer homogenen Linienmasse (**)

Entlang der z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems sei eine Masse homogen mit der Linienmassendichte λ verteilt. Ein Teilchen der Masse m bewege sich in dem von der Massenverteilung erzeugten Feld.

- Zeigen Sie, ausgehend vom Gravitationsfeld einer Punktmasse, dass das von der Linienmassendichte erzeugte Gravitationsfeld in Zylinderkoordinaten gegeben ist durch

  $$\vec{G}(r,\phi,z) = -2\gamma\frac{\lambda}{r}\vec{e_r}$$

  wobei γ die Gravitationskonstante bezeichne.

  LÖSUNG:

  Ein Masseelement dm am Ort $\tilde{\vec{r}}$ erzeugt am Ort $\vec{r}$ das Gravitationsfeld:

  $$d\vec{G} = \gamma\frac{dm}{||\vec{r}-\tilde{\vec{r}}||^3}(\tilde{\vec{r}}-\vec{r})$$

  Nun liegen alle Massenelemente am Ort $\tilde{\vec{r}} = \tilde{z}\vec{e_z}$. Aus Symmetriegründen müssen die Feldanteile G_ϕ und G_z verschwinden. Weiterhin erlaubt die Rotationsinvarianz um die z-Achse den Winkel $\tilde{\phi}$ stets so zu wählen, dass $\tilde{\phi} = \phi$. Ferner ist das Masseelement durch die Linienmassedichte gegeben: $dm = \lambda d\tilde{z}$. Es folgt daher:

  $$G_r = -\gamma\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rd\tilde{z}}{\left(\sqrt{(z-\tilde{z})^2+r^2}\right)^3} = -2\gamma\lambda r\lim_{\tilde{z}\to\infty}\frac{\tilde{z}}{r^2\sqrt{r^2+\tilde{z}^2}} = -2\gamma\frac{\lambda}{r}$$

  Damit folgt die Behauptung.

- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Teilchens in Zylinderkoordinaten auf.

  LÖSUNG:

  Die Bewegungsgleichungen lauten:

  $$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= -2\gamma\frac{\lambda}{r} \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} &= 0 \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

- Ist das Gravitationsfeld $\vec{G}$ konservativ?

  LÖSUNG:

  Das Gravitationsfeld ist nicht konservativ, da der Definitionsbereich nicht einfach wegzusammenhängend ist.

- Welche Größen sind erhalten und warum?

  LÖSUNG:

  Wegen der Rotationsinvarianz um die z-Achse ist der Drehimpuls in z-Richtung erhalten. Ferner ist durch die Translationsinvarianz in z-Richtung auch der Impuls in diese Richtung erhalten.

  Die Energie ist nicht notwendigerweise erhalten, da das Gravitationsfeld nicht konservativ ist. Es kann Bahnen geben, die die z-Achse einschließen und auf denen die Energie nicht erhalten ist.

- Geben Sie einen Ausdruck für die Bahngleichung $r(\phi)$ an. Nehmen Sie ferner $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ an, sowie $r > 0 \ \forall\, t$.

  LÖSUNG:

  Aus der zweiten Bewegungsgleichung folgt

  $$r^2\dot{\phi} = const.$$

  Definiert man nun $\tilde{l} = r^2\dot{\phi}$, so folgt aus der ersten Bewegungsgleichung:

  $$\ddot{r} - \frac{\tilde{l}^2}{r^3} = -2\gamma\frac{\lambda}{r}$$

  Ferner folgt direkt aus der Definition von $\tilde{l}$:

  $$\dot{\phi} = \frac{\tilde{l}}{r^2}$$

  Mit Hilfe der Kettenregel erhält man einen Ausdruck für die Bahngleichung:

  $$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \pm r\sqrt{\frac{2Er^2}{l^2} - 1 - \frac{4\gamma\lambda}{l^2}r^2\log\frac{r}{r_0}}$$

  Durch Integration dieser Differentialgleichung kann eine Lösung gewonnen werden. In obigen Ausdruck sind E und l Konstanten. E könnte mit der Energie gleichgesetzt werden. Allerdings gibt es Bahnen, auf denen diese nicht erhalten ist. Könnte man zeigen, dass diese nicht Lösungen der Differentialgleichungen sein können, so wäre eine Gleichsetzung von E mit der Energie durchaus sinnvoll.

3 Newtonsche Mechanik

3.1 Das Keplersche Problem (*)

Beim Keplerproblem bewegt sich ein Teilchen der Masse m in einem anziehenden Potential der Form $U(r) = -\alpha/r$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Teilchenbahnen Kegelschnitte sind. Hier soll dieses Resultat nocheinmal auf einem anderen Weg gezeigt werden.

- Zeigen Sie, dass der sogenannte *Runge-Lenz-Laplace*-Vektor eine Erhaltungsgröße ist:

  $$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{l} - m\alpha\frac{\vec{r}}{r}$$

  LÖSUNG:

  $\vec{A}$ ist erhalten genau dann, wenn $\dot{\vec{A}} = 0$ gilt. Also wird nun $\dot{\vec{A}}$ berechnet:

  $$\dot{\vec{A}} = \dot{\vec{p}} \times \vec{l} - m\alpha\frac{\dot{\vec{r}}}{r} + m\alpha\frac{\vec{r}}{r^3}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{p}} \times \vec{l} + m\alpha\frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{r^3} = \left(\dot{\vec{p}} + \alpha\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \times \vec{l} = 0$$

  Hierbei wurde die Erhaltung des Drehimpulses $\vec{l}$, sowie die Bewegungsgleichung ausgenutzt.

- Was bedeutet die Erhaltung dieser Größe? Mit welcher Symmetrie des Systems ist sie verknüpft?

  LÖSUNG:

  Die Erhaltung des *Runge-Lenz-Laplace*-Vektors hat zur Konsequenz, dass es keine Periapsisdrehung beim Keplerproblem gibt. In der Periapsis erreicht das Teilchen seinen minimalen Abstand vom Zentralkörper. Daher ist dort die Radialgeschwindigkeitkeit null. Folglich steht in der Periapsis der Impulsvektor senkrecht zum Ortsvektor. Der Abstand in der Periapsis ist durch die Teilchenenergie und den Drehimpuls bestimmt. Er ist für die gesamt Bewegung konstant. Man kann nun leicht zeigen, dass in der Periapsis $\vec{A} \parallel \vec{r}$ gilt. Über den Ausdruck $\vec{A} \cdot \vec{r}$ kann aber auch die Bahngleichung in ebenen Polarkoordinaten gewonnen werden, wie in der nächsten Aufgabe gezeigt. Also ist der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{A}$ und $\vec{r}$ fest mit den Koordinaten verknüpft. Daher kann es zu keiner Periapsisdrehung kommen. Andernfalls wäre es unmöglich aus dem *Runge-Lenz-Laplace*-Vektor die Bewegungsgleichung zu gewinnen.

  Die zugeordnete Symmtrie ist keine geometrische, sondern eine sogenannte *dynamische Symmetrie*. Die Symmetrietransformationen werden beschrieben durch die Gruppe $SO(4)$.

- Leiten Sie aus der Tatsache, dass $\vec{A}$ erhalten ist, einen Ausdruck für die Bahngleichung her.

  LÖSUNG:

  Durch Skalarmultiplikation von $\vec{A}$ mit dem Ortsvektor erhält man:

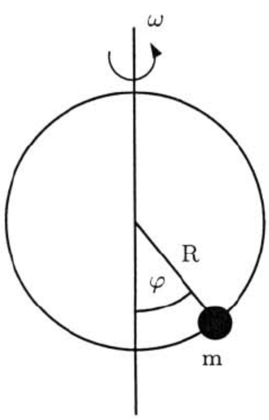
  $$\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar\cos\phi = \vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{l}) - m\alpha r = \vec{l} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) - m\alpha r = \vec{l}^2 - m\alpha r$$

  Durch Auflösen nach r findet man folgenden Ausdruck:

  $$r = \frac{\vec{l}^2}{m\alpha + A\cos\phi} = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\phi}$$

  Hierbei bezeichnet ϕ den Winkel zwischen dem *Runge-Lenz-Laplace*-Vektor und dem Fahrstrahl. In der Periapsis und Apoapsis gilt $\phi = \pi$ bzw. $\phi = 0$. Legt man die x-Achse vom Ursprung in Richtung der Apoapsis und senkrecht dazu die y-Achse, so beschreibt obige Gleichung einen Kegelschnitt in Polarkoordinaten.

3.2 Massepunkt auf rotierendem Ring im Schwerefeld (Klausuraufgabe) (**)



Ein Ring mit Radius R rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Ein Massepunkt m kann sich frei auf dem Ring bewegen und unterliegt zusätzlich der Schwerkraft.

- Zeigen Sie mit Hilfe der Newtonschen Mechanik, dass φ der Bewegungsgleichung

  $$\ddot{\varphi} = (\omega^2 \cos\varphi - \frac{g}{R})\sin\varphi$$

  genügt.

  LÖSUNG:

  Wählt man die z-Achse von oben nach unten in der Zeichnung und führt nun Kugelkoordinaten ein, so vereinfacht sich das Problem etwas.

Es ist zu beachten, dass auf den Massepunkt drei Kräfte wirken: Die erste ist die Gewichtskraft in positive z-Richtung. Weiterhin wirkt eine Kraft in radialer Richtung, die verhindert, dass der Massepunkt den Ring in radialer Richtung verlassen kann. Die letzte Kraft wirkt in Rotationsrichtung und verhindert, dass der Massepunkt den Ring in diese Richtung verlässt. Entlang des Ringes wirken keine Zwangskräfte.

Man findet daher folgende Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = g(\cos\varphi\vec{e_r} - \sin\varphi\vec{e_\theta}) + F_r\vec{e_r} + F_\alpha\vec{e_\alpha}$$

Hierbei bezeichnet α den Drehwinkel um die Drehachse des Ringes. Benutzt man das Ergebnis aus der ersten Aufgabe und berücksichtigt die Bedingungen $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ sowie $\dot{\alpha} = \omega$, erhält man als Bewegungsgleichung für die φ-Richtung:

$$R\ddot{\varphi} - R\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi = -g \sin\varphi$$

Aufgelöst nach $\ddot{\varphi}$ findet man:

$$\ddot{\varphi} = \left(\omega^2 \cos\varphi - \frac{g}{R}\right) \sin\varphi$$

- Bestimmen Sie die statischen Lösungen für $-\pi < \varphi \leq \pi$ für die Fälle $\omega^2 < g/R$ und $\omega^2 > g/R$.

  LÖSUNG:

  Statische Lösungen sind diejenigen mit $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$. Man findet, dass notwendigerweise entweder $\sin\varphi = 0$ oder $\cos\phi = g/R\omega^2$ gelten muss.

  Beispielsweise führt die erste Bedingung notwendigerweise auf $\varphi = \pi$. Es sollen nun Lösungen $\varphi \neq \pi$ gesucht werden. Offensichtlich existieren solche nur, falls $\omega^2 > g/R$ gilt. Die Lösungen sind also:

$$\begin{aligned} \varphi = \pi, &\quad \omega^2 < \frac{g}{R} \\ \varphi \in \{\pi, \arccos\frac{g}{R\omega^2}\}, &\quad \omega^2 > \frac{g}{R} \end{aligned}$$

- Welche der Lösungen sind stabil? Was passiert im Fall $\omega^2 = g/R$ an den Stellen $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$?

  LÖSUNG:

  Zur Analyse der Stabilität werden kleine Auslenkungen um die Gleichgewichtslagen betrachtet. In diesem Fall kann die Bewegungsgleichung taylorentwickelt werden. In erster Ordnung findet man für eine Entwicklung der Form $\varphi = \varphi_0 + \epsilon$, wobei $\epsilon \ll 1$ gelten soll:

$$\ddot{\epsilon} = \epsilon \left(\cos\varphi_0 \left(\omega^2 \cos\varphi_0 - \frac{g}{R}\right) - \omega^2 \sin\varphi_0\right)$$

  Hierbei wurde ausgenutzt, dass φ_0 eine Gleichgewichtslage ist.

  Durch Einsetzen obiger Gleichgewichtslagen findet man:

$$\ddot{\epsilon} = \epsilon \left(\omega^2 + \frac{g}{R}\right)$$

  für kleine Auslenkungen um $\varphi_0 = \pi$. Offensichtlich ist diese Position instabil. Die eventuelle andere Gleichgewichtslage liefert:

$$\ddot{\epsilon} = -\sin\varphi_0 \omega^2 \epsilon$$

  Diese Position ist stabil und es werden harmonische Schwingungen bei kleinen Störungen auftreten.

  Abschließend soll der Fall $\omega^2 = \frac{g}{R}$ betrachtet werden. Die Position $\varphi = \pi$ bleibt weiterhin ein instabiler Gleichgewichtspunkt. Für das Verhalten bei $\varphi = 0$ muss in höhere Ordnungen entwickelt werden. Man findet hier:

$$\ddot{\epsilon} = -\frac{\omega^2}{2}\epsilon^3$$

  Diese Position ist also stabil.

4 Bewegung in einem Zentralpotential

4.1 Umlauffrequenzen in einem Zentralpotential (Klausuraufgabe) (**)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Zentralpotential der Form

$$U(r) = -\frac{c}{r^\lambda}$$

wobei $\lambda c > 0, \lambda \neq 0$ und $\lambda < 2$ gilt.

- Wie lautet das dazugehörige effektive Potential $U_{eff}(r)$?

  Lösung:

  Es handelt sich hierbei um ein rotationssymmetrisches Problem, daher macht es Sinn, ein effektives Potential anzugeben, dass die Bewegung in radialer Richtung bestimmt:

  $$U_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{c}{r^\lambda}$$

  Die Lösung ist die Summe aus dem gegebenen Zentralpotential und dem sogenannten *Zentrifugalpotential*.

- Finden Sie die Beziehung zwischen Radius und Drehimpuls, für die sich das Teilchen auf eine stabilen Kreisbahn mit Radius r_0 bewegt.

  Lösung:

  Ein Teilchen bewegt sich auf einer stabilen Kreisbahn genau dann, wenn das effektive Potential bei dem entsprechenden Radius r_0 ein Minimum besitzt. Notwendigerweise gilt dann $\frac{dU_{eff}}{dr}(r) = 0$. Daher:

  $$\frac{l^2}{mr_0^3} = \lambda \frac{c}{r_0^{\lambda+1}}$$

  Daraus folgt für die Beziehung zwischen Radius und Drehimpuls:

  $$r_0 = \left(\frac{m\lambda c}{l^2}\right)^{\frac{1}{\lambda-2}}$$

  Zu prüfen bleibt noch die Stabilität der Bahn, also ob tatsächlich ein Minimum bei $r = r_0$ vorliegt. Dieser Schritt wird hier in der Lösung übersprungen.

- Zeigen Sie, dass man für die Kreisfrequenz ω_0 eines Umlaufs auf diesem Orbit erhält:

  $$\omega_0 = \sqrt{\frac{c\lambda}{mr_0^{\lambda+2}}}$$

  Lösung:

  Der Drehimpuls auf einer Kreisbahn ist gegeben durch $l = mr_0^2\omega_0$. Setzt man dies in den zuvor gefundenenen Zusammenhang zwischen Bahnradius und Drehimpuls ein, so erhält man:

  $$r_0^{\lambda-2} = \frac{mc\lambda}{m^2 r_0^4 \omega_0^2}$$

  Aufgelöst nach ω_0:

  $$\omega_0 = \sqrt{\frac{c\lambda}{mr_0^{\lambda+2}}}$$

Betrachten Sie nun zusätzlich zur Kreisbewegung kleine Schwingungen um die Kreisbahn in radialer Richtung.

- Wie lautet das (effektive) Potential für diese radiale Bewegung im Fall kleiner Schwingungen?

  Lösung:

  Es ist sinnvoll den Ansatz $r(t) = r_0 + \epsilon(t)$ zu machen, wobei $\epsilon(t)^2 \ll r_0^2$ gelten soll. Zunächst soll die zweite Ableitung $\frac{d^2}{dr^2}U_{eff}(r_0)$ berechnet werden:

  $$\frac{d^2}{dr^2}U_{eff}(r_0) = \frac{3l^2}{mr_0^4} - \lambda(\lambda+1)\frac{c}{r_0^{\lambda+2}} = \frac{c\lambda}{r_0^{\lambda+2}}(2-\lambda)$$

Die Taylorentwicklung lautet also:

$$U_{eff}(r_0+\epsilon) \approx U_{eff}(r_0) + \frac{1}{2}\frac{c\lambda(2-\lambda)}{r_0^{\lambda+2}}\epsilon^2$$

Die Bewegungsgleichung für ϵ lautet daher:

$$\ddot{\epsilon} = -\omega_R^2\epsilon, \;\; \omega_R^2 = \frac{c\lambda(2-\lambda)}{mr_0^{\lambda+2}} = \omega_0^2(2-\lambda)$$

- Leiten Sie den Zusammenhang zwischen der Kreisfrequenz der radialen Schwingung ω_R und ω_0 her.

  LÖSUNG:

  Siehe voherige Aufgabe.

- Welche Bedingung muss λ erfüllen, damit sich periodische, geschlossene Orbits ergeben?

  LÖSUNG:

  Um periodische Orbits zu erhalten, muss ω_R reell sein. In diesem Fall sind die Kreisbahnen stabil. Andernfalls entfernt sich das Teilchen bei einer kleinen Störung exponentiell von der ursprünglichen Bahn. Daher muss gelten: $\lambda < 2$, wie vorrausgesetzt.

- Diskutieren Sie das Verhältnis ω_R/ω_0 sowohl für den Fall eines Coulomb-Potentials, als auch für den Fall des harmonischen Oszillators.

  LÖSUNG:

  Im Falle eines Coulomb-Potentials gilt $\lambda = 1$, daher

  $$\omega_R^{(Coulomb)} = \omega_0^{(Coulomb)}$$

  Für ein harmonisches Potential ($\lambda = -2$) findet man:

  $$\omega_R^{(harmonisch)} = 2\omega_0^{(harmonisch)}$$

4.2 Aufgabe aus Doctoral General Examination (2002) des MIT (***)

Ein Massepunkt der Masse m bewege sich in einem rotationssymmetrischen Potential $U(r)$.

- Bestimmen Sie die Periodendauer einer Bewegung auf einer kreisförmigen Bahn mit Radius r als Funktion von $U(r)$ und seiner Ableitungen.

  LÖSUNG:

  Das effektive Potential für dieses Problem ist:

  $$U_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)$$

  Eine kreisförmige Bahn ist genau dann möglich, wenn $\frac{dU_{eff}}{dr}(r) = 0$ gilt. Man erhält:

  $$\frac{l^2}{mr^3} = \frac{dU}{dr}(r)$$

  Mit der Definition $l = mr^2\omega_0$ erhält man schließlich:

  $$T = 2\pi\sqrt{\frac{mr}{\frac{dU}{dr}(r)}}$$

- Nun unterliege der kreisförmige Orbit einer kleinen Störung, sodass nun $r(t) = r_0 + \epsilon(t)$ gelte. Hierbei sei r_0 der Radius der ungestörten Kreisbahn. Bestimmen Sie unter der Annahme $\epsilon(t)^2 \ll r_0^2$ die allgemeine Lösung für $\epsilon(t)$. Schreiben Sie Ihre Antwort als Funktion der Teilchenenergie E, des Potentials $U(r_0)$ und dessen Ableitungen. Bestimmen Sie weiterhin die Periodendauer der radialen Oszillation als Funktion von $U(r_0)$ und dessen Ableitungen.

  LÖSUNG:

  Eine Taylorentwicklung um den Kreisradius des effektiven Potentials ergibt:

  $$U_{eff}(r_0 + \epsilon) = U_{eff}(r_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}(r_0)\epsilon^2$$

  Man ließt daraus die Frequenz des Oszillators ab:

  $$\omega^2 = \frac{1}{m}\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}(r_0) = \frac{3l^2}{m^2r_0^4} + \frac{1}{m}\frac{d^2U}{dr^2}(r_0) = 3\omega_0^2 + \frac{1}{m}\frac{d^2U}{dr^2}(r_0) = \left(\frac{1}{mr^3}\frac{d}{dr}\left(r^3\frac{dU}{dr}\right)\right)_{r=r_0}$$

  Im letzten Schritt bezeichnet ω_0 die Kreisfrequenz auf der Kreisbahn aus der letzten Aufgabe. Ferner wurde die Definition des Drehimpulses benutzt.

  Die Periodendauer beträgt:

  $$T_{osz} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{1}{mr^3}\frac{d}{dr}\left(r^3\frac{dU}{dr}\right)\right)_{r=r_0}^{-1/2}$$

  Im Falle der maximalen Auslenkung eines harmonischen Oszillators ist seine Gesamtenergie gleich der potentiellen Energie. Mit $U_{eff}(r_0) = E_0$ folgt als allgemeine Lösung für $\epsilon(t)$:

  $$\epsilon(t) = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2(E - E_0)}{m}}\cos\left(\omega(t - t_0)\right)$$

- Zur Beschreibung von Wechselwirkungen, deren Austauschteilchen massebehaftet sind, ist in guter Näherung das Potential durch

  $$U(r) = -\frac{GM}{r}\exp(-kr)$$

  gegeben. Dieses Potential wird *Yukawa-Potential* genannt.

  Zeigen Sie, dass es im Falle $r > (2k)^{-1}(1 + \sqrt{5})$ keine stabilen kreisförmigen Bahnen geben kann.

  LÖSUNG:

  Im letzten Aufgabenteil wurde ein Kriterium für stabile Bahnen abgeleitet:

  $$\left(\frac{1}{mr^3}\frac{d}{dr}\left(r^3\frac{dU}{dr}\right)\right)_{r=r_0} = \omega^2 > 0$$

  Setzt man das gegebene *Yukawa*-Potential ein, so erhält man als Bedingung:

  $$GM\left(1 + kr_0 - k^2r_0^2\right)\exp(-kr_0) > 0$$

  Durch quadratisches Ergänzen des Polynoms und Streichen der überflüssigen positiven Faktoren führt dies zu der Bedingung:

  $$(2kr_0 - 1)^2 < 5$$

  Unter den gegebenen Vorraussetzungen ist diese Ungleichung verletzt. Es gibt daher keine stabilen Bahnen mit $r > (2k)^{-1}(1 + \sqrt{5})$.

- Zeigen Sie, dass bei einer Bewegung in einem Yukawa-Potential geschlossene Bahnen mit positiver Energie existieren. Es soll hier angenommen werden, dass $U(r \to \infty) = 0$ gilt.

  LÖSUNG:

  Der Radius, der größten, gerade noch stabilen Kreisbahn ist $r_0 = (2k)^{-1}(1+\sqrt{5})$. Dort beträgt die Gesamtenergie des Teilchens:

$$E = U(r_0) + \frac{1}{2} m r_0^2 \omega_0^2 = U(r_0) + \frac{1}{2} r_0 \frac{dU}{dr}(r_0) = \frac{GM}{2r_0} \exp(-kr_0)(kr_0 - 1) = \frac{GM}{2r_0} \exp(-kr_0) \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$$

  Reduziert man den Radius etwas, so bleibt die Energie weiter positiv und die Kreisbahn ist stabil.

4.3 Bewegung um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch (***), **Aufgabe aus** QUALIFYING EXAM (2008) **der Stanford University**

Die Bewegung eines Teilchens um ein nicht rotierendes schwarzes Loch herum kann als Bewegung in einem pseudo-Newtonschen Gravitationspotential der Form

$$\Psi(r) = -\frac{GM}{r - r^*} \quad (r > r^*)$$

genähert werden. Im folgenden soll nur der Bereich außerhalb des Ereignishorizonts $r^* = 2GM/c^2$ betrachtet werden. Weiterhin bezeichne M die Masse des schwarzen Loches und $m \ll M$ die Masse des Teilchens.

- Welche erhaltenen Größen gibt es und mit welchen Symmetrien des Systems sind sie verknüpft?

  LÖSUNG:

  Das System ist rotationssymmetrisch, also ist der Drehimpuls des Teilchens erhalten. Ferner ist auch die Energie des Teilchens erhalten, da das System invariant bzgl. Verschiebungen in der Zeit ist.

  Der *Runge-Lenz-Laplace*-Vektor ist hier nicht erhalten!

- Leiten Sie einen Ausdruck für das effektive Potential $U_{eff}(l, r)$ her. Hierbei bezeichne l den Betrag des Drehimpulses des Teilchens.

  Führen sie die Abkürzungen $\alpha := cl/GMm$ und $x := r/r^*$ ein und skizzieren Sie die Funktion $x \mapsto U_{eff}(l, xr^*)/mc^2$ für einige Werte von α im Bereich von $0 - 5$.

  Hinweis: Das effektive Potential ist definiert über

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + U_{eff}(l, r)$$

  Hierbei bezeichnet E die Gesamtenergie des Teilchens.

  LÖSUNG:

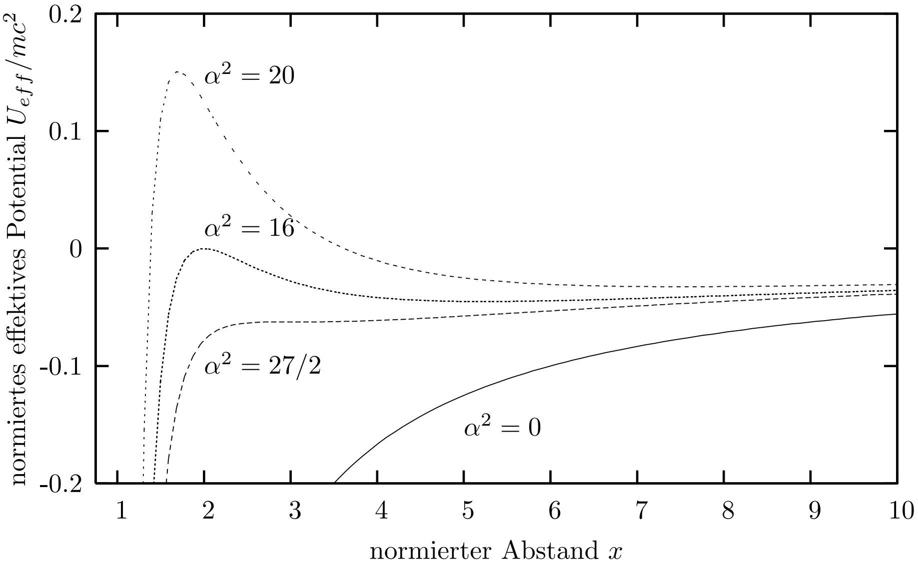
  Offenbar ist das effektive Potential gegeben durch:

$$U_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r - r^*}$$

  Die Herleitung erfolgt durch Aufstellen der Bewegungsgleichungen und Ausnutzung der Erhaltung von Drehimpuls und Gesamtenergie.

  Setzt man die Abkürzungen ein, so erhält man:

$$U_{eff}(l, xr*)/mc^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4x^2} + \frac{1}{1-x}\right)$$



- Für welche Werte von r existieren kreisförmige Bahnen? Wie lautet die Winkelgeschwindigkeit $\Omega(r)$ eines Teilchens auf einer solchen Bahn?

  LÖSUNG:

  Eine kreisförmige Bahn existiert, falls das effektive Potential ein Extremum besitzt, da dann dort $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ gilt.

  Offensichtlich ist die Normierung nur eine andere Wahl von Einheiten. Daher kann das Problem auch in den normierten Größen gelöst werden.

  Das normierte effektive Potential hat ein Extremum, falls gilt:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\alpha^2}{2x^3}$$

  Dabei nimmt die linke Seite alle positiven Werte an. Durch geeignete Wahl von α^2, also des Drehimpulses, kann diese Gleichung immer gelöst werden. Also gibt es für alle $x > 1$ bzw. $r > r^*$ kreisförmige Orbits.

  Aus der Definition des Drehimpulses findet man die Umlaufdauer:

$$\Omega^2 = \frac{l^2}{m^2 r^4} = \frac{c^2 \alpha^2 r^{*2}}{4r^4} = \frac{c^2 r^{*2} x^3}{2r^4(1-x)^2} = \frac{GM}{r(r^* - r)^2}$$

- Für welche Werte von r sind die kreisförmigen Bahnen instabil?

  LÖSUNG:

  Eine kreisförmige Bahn ist instabil, wenn das effektive Potential am entsprechenden Radius ein Maximum hat, also

$$\frac{d^2 U_{eff}}{dr^2} < 0$$

  gilt. Die Rechnung soll wieder in den normierten Größen durchgeführt werden. Die Bedingung lautet dann:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3\alpha^2}{2x^4} + \frac{2}{(1-x)^3}\right) > 0$$

  Da diese Bedingung an einem Extremum gilt, ist die Bedingung aus dem letztem Aufgabenteil weiterhin gültig. Die Ungleichung führt nun zu

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{1-x} < 0$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu $x < 3$. Für $r < 3r^*$ sind die Kreisbahnen instabil.

- Für welche Werte von α wird ein Teilchen aus großer Entfernung mit der Energie $E = 0$ vom schwarzen Loch verschluckt?

  LÖSUNG:

  Ein Teilchen mit Gesamtenergie $E = 0$ kann in das schwarze Loch fallen, wenn das Maximum des effektiven Potentials kleiner als 0 ist. Dies kann mathematische folgerndermaßen ausgedrückt werden:

  $$\alpha^2 = \frac{2x^3}{(1-x)^2}$$
  $$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4x^2} + \frac{1}{1-x}\right) < 0$$
  $$x < 3$$

  Durch Lösen der Ungleichung erhält man $x < 2$. Damit erhält man für α^2 die Bedingung:

  $$\alpha^2 < 16$$

5 Streuung von Teilchen

5.1 Sturz in die Sonne (Klausuraufgabe) (*)

Ein punktförmiger Komet der Masse m bewegt sich im Gravitationsfeld der Sonne (Masse M, Radius R). Die Energie der Relativbewegung zwischen Komet und Sonne sei E.

- Geben Sie den Relativimpuls q zwischen Komet und Sonne für den Abstand $r \to \infty$ an und drücken Sie den Bahndrehimpuls l durch q und den Stoßparameter b aus.

  LÖSUNG:

  Für große Abstände $r \to \infty$ verschwindet die Gravitationskraft und wegen der Energieerhaltung folgt nun:

  $$E = \frac{1}{2m}q^2 \ \rightarrow \ q = \sqrt{2mE}$$

  Per definitionem ist der Bahndrehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$. Führt man ein kartesisches Koordinatensystem ein, bei dem die x-Achse in Richtung des Impulses $\vec{q}$ zeigt und die y-Achse senkrecht dazu steht und der Schwerpunkt des Systems im Ursprung liegt, so ist der Stoßparameter b gerade die y-Koordinate des Kometen zum Startzeutpunkt. Folglich ist der Drehimpuls gegeben durch:

  $$l = bq$$

- Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit der Komet in die Sonne stürzt? Bestimmen Sie den kritischen Stoßparameter b_0, bei dem dies eintritt. Wann kann ein punktförmiger Komet in eine punktförmige Sonne stürzen?

  LÖSUNG:

  Der Komet kann in die Sonne stürzen, falls $E > U_{eff}(R)$ ist, also die Gesamtenergie größer als das effektive Potential am Sonnenrand ist. Ist das Wechselwirkungspotential durch $U(r)$ gegeben, so lautet die Bedingung:

  $$E > \frac{l^2}{2mR^2} + U(R)$$

  Setzt man die Größen aus dem ersten Aufgabenteil ein, so findet sich eine Ungleichung folgender Art:

  $$R^2\left(1 - \frac{U(R)}{E}\right) > b^2$$

Der kritische Parameter ist daher:

$$b_0 = R\sqrt{1 - \frac{U(R)}{E}}$$

Wird die Sonne punktförmig, so ist dies gleichbedeutend mit $R \to 0$. Setzt man für die Wechselwirkung ein Newtonsches Gravitationspotential ein, so findet man, dass dann $E \to \infty$ sein müsste, wenn $l \neq 0$ ist. Daher kann ein punktförmiger, der sich nicht zentral auf die Sonne zubewegt, nie in die Sonne stürzen. Gilt dagegen $l = 0$, so ist dies sehr wohl möglich.

- Zeigen Sie, dass der totale Wirkungsquerschnitt für den Sturz gegeben ist durch

$$\sigma_{tot} = \pi R^2 \left(1 - \frac{U(R)}{E}\right)$$

wobei $U(R)$ die potentielle Energie am Rand der Sonne ist. Diskutieren Sie das Ergebnis.

LÖSUNG:

Der totale Wirkungsquerschnitt gibt an, wie groß die Fläche ist, die getroffen werden muss, damit ein Ereignis stattfindet. Aus den vorangegangenen Überlegungen ist ersichtlich, dass dies eine Kreisfläche mit einem Radius von b_0 sein muss:

$$\sigma_{tot} = \pi b_0^2 = \pi R^2 \left(1 - \frac{U(R)}{E}\right)$$

Das Ergebnis sagt beispielsweise aus, dass bei immer größer werdenden Kometenenergien der totale Wirkungsquerschnitt gegen den geometrischen Querschnitt der Sonne geht. Dies ist auch nicht verwunderlich, da bei hohen Energien die anziehende Kraft von der Sonne immer irrelevanter wird, sodass im Grenzfall $E \to \infty$ der Komet die Sonne direkt treffen müsste, um in si hineinzufallen.

5.2 Transformation des differentiellen Wirkungsquerschnitt (***)

Betrachten Sie zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2, die über ein Potential der Form $U(r)$ wechselwirken. Hierbei bezeichne r den relativen Abstand der beiden Teilchen. In dieser Aufgabe soll eine Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Laborsystem hergeleitet werden, wenn er im Schwerpunktsystem bekannt ist.

- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für beide Teilchen auf und zeigen Sie, dass sich diese durch eine Transformation ins Schwerpunktsystem entkoppeln.

LÖSUNG:

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$m_1\ddot{\vec{r_1}} = \frac{dU}{dr}(r)\frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{||\vec{r_1} - \vec{r_2}||}$$
$$m_2\ddot{\vec{r_2}} = \frac{dU}{dr}(r)\frac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{||\vec{r_1} - \vec{r_2}||}$$

Die Schwerpunktskoordinaten $\vec{R}$ und $\vec{r}$ sind definiert über:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$
$$\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

Mit Hilfe der Umkehrtransformation:

$$\vec{r_1} = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$
$$\vec{r_2} = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

und der reduzierten Masse $\mu = m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}$ führt dies zur den entkoppelten Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{\vec{R}} = 0$$
$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\text{grad}\, U(r)$$

- Betrachten Sie nun folgenden Stoßprozess in zwei Dimensionen: Ein Teilchen der Masse m_1 streut elastisch an einem zweiten, ruhenden Teilchen der Masse m_2. Der Stoß werde durch ein beliebiges Potential bestimmt.

  Bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit des Projektils nach dem Stoß, wenn das Projektil um einen Winkel ϕ gestreut wird. Ferner lösen Sie auch das inverse Problem, bestimmen Sie also den Ablenkwinkel ϕ für eine gegebene Streugeschwindigkeit v des Projektils.

  LÖSUNG:

  Es gelten Impuls- und Energieerhaltung. Bezeichne nun ϵ den Winkel, um den das Targetteilchen abgelenkt sind, gemessen im mathematisch negativen Sinn. Weiterhin sei die Geschwindigkeit vom Projektil vor dem Stoß u, sowie nach dem Stoß v. Die Geschwindigkeit des Targets nach dem Stoß sein w. Die x-Achse zeige in Flugrichtung des einfallenden Teilchens. Die Erhaltungsätze führen zu:

$$\begin{aligned} m_1 u &= m_1 v \cos\phi + m_2 w \cos\epsilon \\ 0 &= m_1 v \sin\phi - m_2 w \sin\epsilon \\ m_1 u^2 &= m_1 v^2 + m_2 w^2 \end{aligned}$$

  Löst man die erste Gleichung nach $\cos\epsilon$ und die zweite nach $\sin\epsilon$ auf, quadriert und addiert dann bei so erhaltenen Gleichungen, so erhält man unter Benutzung der dritten Gleichung zur Elimination von w:

$$(m_1 + m_2) v^2 - 2 m_1 u \cos\phi v + (m_1 - m_2) u^2 = 0$$

  Löst man diese Gleichungen nach v bzw. w auf, so findet man folgenden Ausdruck für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$v = \frac{u}{m_1 + m_2} \left(m_1 \cos\phi \pm m_2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin^2\phi} \right)$$

  Umgekehrt erhält man für den Winkel ϕ in Abhängigkeit von der Streugeschwindigkeit:

$$\cos\phi = \frac{(m_1 - m_2) u^2 + (m_1 + m_2) v^2}{2 m_1 u v}$$

- Angenommen, die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung wäre gelöst und es ergibt sich bei einem Stoßparameter b der Ablenkwinkel $\theta(b)$. Benutzen Sie die Transformation aus der ersten Teilaufgabe und das Ergebnis der zweiten Teilaufgabe um den Ablenkwinkel $\phi(b)$ im Laborsystem zu bestimmen. Interpretieren Sie das Ergebnis.

  LÖSUNG:

  Die Geschwindigkeiten vor dem Stoß sind $\dot{\vec{r_1}} = u\vec{e_x}$ und $\dot{\vec{r_2}} = 0$. Dies ergibt für die Relativgeschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = -u\vec{e_x}$. Da die Energie der Relativbewegung erhalten bleibt, bleibt der Betrag dieses Vektors beim Stoß erhalten. Lediglich die Richtung ändert sich um den Winkel $\theta(b)$. Aus dem Zusammenhang zwischen der Koordinate des ersten Teilchens und den Schwerpunktskoordinaten findet man:

$$v^2 = \dot{\vec{r_1}}^2 = \dot{R}^2 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 u^2 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} u \dot{R} \cos\theta(b)$$

  Hierbei bezeichnet $\dot{R}$ die Schwerpunktsgeschwindigkeit. Diese kann aus der Bedingung $\dot{\vec{r_2}} = 0$ errechnet werden zu:

$$\dot{R} = \frac{m_1 u}{m_1 + m_2}$$

Mit dem Ergebnis aus der letzten Teilaufgabe findet man somit:

$$\cos\phi(b) = \frac{(m_1 - m_2)u^2 + (m_1 + m_2)\frac{u^2(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\theta(b))}{(m_1+m_2)^2}}{2m_1 \frac{u^2\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\theta(b)}}{m_1+m_2}}$$
$$= \frac{m_1 + m_2\cos\theta(b)}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\theta(b)}}$$

Im Falle $m_2 \to \infty$, also eines unendlich schweren Targets, findet man $\theta(b) = \phi(b)$ gilt. In diesem Fall braucht die Ablenkungsfunktion nicht zu modfiziert werden. Ist das Target leichter als Projektil, so kann nicht in alle Richtungen gestreut werden.

- Finden Sie einen Zusammenhang zwischen den differentiellen Wirkungsquerschnitten $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Labor}$ im Laborsystem und $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Schwerpunkt}$ im Schwerpunktsystem.

  LÖSUNG:

  Die Targetfläche $d\sigma$ für die Ablenkung in einen bestimmten Raumwinkelbereich ist gegeben durch:

$$2\pi b db = d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

  Hierbei bezeichnet b den Stoßparameter. Mit der Definition des Raumwinkelelements in einem rotationssymmetrischen Problem $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ folgt unmittelbar:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)\frac{db(\theta)}{d\theta}}{\sin\theta}$$

  Die Fläche $d\sigma$ ist unabhängig vom Streuwinkel. Zur Transformation des differentiellen Wirkungsquerschnitts müssen also nur die Raumwinkelelemente transformiert werden. Der Index L soll im folgenden das Laborsystem bezeichnen und der Index S das Schwerpunktsystem.

  Es gilt:

$$d\Omega_L = 2\pi d(\cos\phi) = 2\pi \frac{m_2^2(m_2 + m_1\cos\theta)}{\left(\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2\cos\theta}\right)^3} d(\cos\theta) = \frac{m_2^2(m_2 + m_1\cos\theta)}{\left(\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2\cos\theta}\right)^3} d\Omega_S$$

  Der gesuchte Zusammenhang ist daher:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Labor} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Schwerpunkt} \cdot \frac{\left(\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2\cos\theta}\right)^3}{m_2^2(m_2 + m_1\cos\theta)}$$