Sebastian Konopka

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* – Frühjahr 2009

Newtonsche Mechanik und das Keplerproblem

1 Koordinatensysteme

1.1 Kugelkoordinaten (**)

In vielen rotationssymmetrischen Problemen sind Kugelkoordinaten sehr nützlich. Die Kugelkoordinaten sind mit den kartesischen Koordinaten über die Koordinatentransformation

$$\Psi : [0, \infty) \times [0, \pi] \times S^1 \to \mathbb{R}^3$$
$$\Psi(r, \theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$$

verknüpft.

- Bestimmen Sie die natürliche Basis der Kugelkoordinaten und daraus eine orthonormierte Basis $\{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi}\}$.
- Drücken Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und die Beschleunigung $\vec{a}$ in Kugelkoordinaten aus.

  Hinweis: Betrachten Sie eine Bahn im Parameterraum $(r, \theta, \phi)(t)$ und bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung durch Differentiation des Zusammenhangs $\vec{r}(t) = \Psi(r(t), \theta(t), \phi(t))$. Beachten Sie, dass die kartesische Basis nicht von der Zeit abhängt.
- Interpretieren Sie die Differenz $\ddot{r}(t)\vec{e_r} - \ddot{\vec{r}}(t)$.

1.2 Parabolische Koordinaten (*)

Bei manchen Problemen mit parabelförmigen Strukturen ist es vorteilhaft sogenannte *Parabolische Koordinaten* einzuführen. Im folgenden soll nur der zweidimensionale Fall untersucht werden. Die parabolischen Koordinaten sind mit den kartesischen auf folgende Art und Weise verknüpft:

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2_+$$
$$\Psi^{-1}(x, y) = (\sqrt{r + x}, \sqrt{r - x})$$

Hierbei ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der kartesische Abstand des Punktes (x, y) vom Ursprung.

- Interpretieren Sie die Koordinaten $(u, v) = \Psi^{-1}(x, y)$.
- Bestimmen Sie die natürliche Basis von Ψ und eine orthonormierte Basis $\{\vec{e_u}, \vec{e_v}\}$.

2 Kraftfelder

2.1 Konservative Kraftfelder (**)

Entscheiden Sie jeweils, ob das angegebene Kraftfeld konservativ ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential. Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang einer beliebigen Kreislinie um den Ursprung bzw. im dreidimensionalen Fall entlang einer Kreislinie, die in einer Ebene liegt, die den Ursprung enthält. Skizzieren Sie die Felder.

- $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x,y,z) = (y^2+z^2)\vec{e_x} + (x^2+z^2)\vec{e_y} + (x^2+y^2)\vec{e_z}$
- $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(\vec{r}) = r^{-5}\left(3(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{a}r^2\right)$
- $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(\vec{r}) = m\gamma\vec{r}r^{-2}$
- $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}\left(\cos\phi\vec{e_r} - \tan\theta\cos\phi\sin\phi\vec{e_\theta} + (1-r^2)\vec{e_\phi}\right)$ Hier braucht kein Kurvenintegral berechnet werden.

  Hinweis: Der Rotationsoperator in Kugelkoordinaten ist gegeben durch:

  $$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\phi\sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\phi}$$

- $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(r,\phi) = \frac{1}{r}\vec{e_\phi}$

Im folgenden bewege sich ein Teilchen in einem Wirbelfeld der Form

$$\vec{F}(r,\phi,z) = m\frac{A}{r}\vec{e_\phi}$$

- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten auf.
- Untersuchen Sie das System auf stabile Kreisbahnen.
- Welche Arbeit wird an dem Teilchen verrichtet, wenn es sich auf auf einer Kreisbahn mit Radius r_0 um den Ursprung bewegt? Diskutieren Sie das Ergebnis.
- Berechnen Sie den Drehimpuls in z-Richtung in Abhängigkeit von der Zeit.

2.2 Bewegung im Feld einer homogenen Linienmasse (**)

Entlang der z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems sei eine Masse homogen mit der Linienmassendichte λ verteilt. Ein Teilchen der Masse m bewege sich in dem von der Massenverteilung erzeugten Feld.

- Zeigen Sie, ausgehend vom Gravitationsfeld einer Punktmasse, dass das von der Linienmassendichte erzeugte Gravitationsfeld in Zylinderkoordinaten gegeben ist durch

  $$\vec{G}(r,\phi,z) = -2\gamma\frac{\lambda}{r}\vec{e_r}$$

  wobei γ die Gravitationskonstante bezeichne.
- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Teilchens in Zylinderkoordinaten auf.
- Ist das Gravitationsfeld $\vec{G}$ konservativ?
- Welche Größen sind erhalten und warum?
- Geben Sie einen Ausdruck für die Bahngleichung $r(\phi)$ an. Nehmen Sie ferner $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ an, sowie $r > 0\ \ \forall\, t$.

3 Newtonsche Mechanik

3.1 Das Keplersche Problem (*)

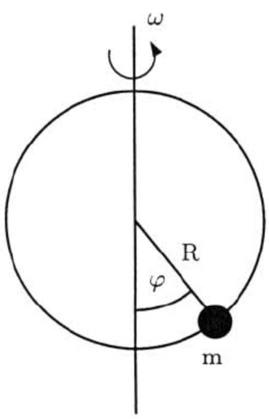
Beim Keplerproblem bewegt sich ein Teilchen der Masse m in einem anziehenden Potential der Form $U(r) = -\alpha/r$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Teilchenbahnen Kegelschnitte sind. Hier soll dieses Resultat nocheinmal auf einem anderen Weg gezeigt werden.

- Zeigen Sie, dass der sogenannte *Runge-Lenz-Laplace*-Vektor eine Erhaltungsgröße ist:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{l} - m\alpha \frac{\vec{r}}{r}$$

- Was bedeutet die Erhaltung dieser Größe? Mit welcher Symmetrie des Systems ist sie verknüpft?
- Leiten Sie aus der Tatsache, dass $\vec{A}$ erhalten ist, einen Ausdruck für die Bahngleichung her.

3.2 Massepunkt auf rotierendem Ring im Schwerefeld (Klausuraufgabe) (**)



Ein Ring mit Radius R rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Ein Massepunkt m kann sich frei auf dem Ring bewegen und unterliegt zusätzlich der Schwerkraft.

- Zeigen Sie mit Hilfe der Newtonschen Mechanik, dass φ der Bewegungsgleichung
$$\ddot{\varphi} = (\omega^2 \cos\varphi - \frac{g}{R}) \sin\varphi$$
genügt.
- Bestimmen Sie die statischen Lösungen für $-\pi < \varphi \leq \pi$ für die Fälle $\omega^2 < g/R$ und $\omega^2 > g/R$.
- Welche der Lösungen sind stabil? Was passiert im Fall $\omega^2 = g/R$ an den Stellen $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$?

4 Bewegung in einem Zentralpotential

4.1 Umlauffrequenzen in einem Zentralpotential (Klausuraufgabe) (**)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Zentralpotential der Form

$$U(r) = -\frac{c}{r^\lambda}$$

wobei $\lambda c > 0, \lambda \neq 0$ und $\lambda < 2$ gilt.

- Wie lautet das dazugehörige effektive Potential $U_{eff}(r)$?
- Finden Sie die Beziehung zwischen Radius und Drehimpuls, für die sich das Teilchen auf eine stabilen Kreisbahn mit Radius r_0 bewegt.
- Zeigen Sie, dass man für die Kreisfrequenz ω_0 eines Umlaufs auf diesem Orbit erhält:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c\lambda}{m r_0^{\lambda+2}}}$$

Betrachten Sie nun zusätzlich zur Kreisbewegung kleine Schwingungen um die Kreisbahn in radialer Richtung.

- Wie lautet das (effektive) Potential für diese radiale Bewegung im Fall kleiner Schwingungen?
- Leiten Sie den Zusammenhang zwischen der Kreisfrequenz der radialen Schwingung ω_R und ω_0 her.
- Welche Bedingung muss λ erfüllen, damit sich periodische, geschlossene Orbits ergeben?
- Diskutieren Sie das Verhältnis ω_R/ω_0 sowohl für den Fall eines Coulomb-Potentials, als auch für den Fall des harmonischen Oszillators.

4.2 Aufgabe aus Doctoral General Examination (2002) des MIT (***)

Ein Massepunkt der Masse m bewege sich in einem rotationssymmetrischen Potential $U(r)$.

- Bestimmen Sie die Periodendauer einer Bewegung auf einer kreisförmigen Bahn mit Radius r als Funktion von $U(r)$ und seiner Ableitungen.
- Nun unterliege der kreisförmige Orbit einer kleinen Störung, sodass nun $r(t) = r_0 + \epsilon(t)$ gelte. Hierbei sei r_0 der Radius der ungestörten Kreisbahn. Bestimmen Sie unter der Annahme $\epsilon(t)^2 \ll r_0^2$ die allgemeine Lösung für $\epsilon(t)$. Schreiben Sie Ihre Antwort als Funktion der Teilchenenergie E, des Potentials $U(r_0)$ und dessen Ableitungen. Bestimmen Sie weiterhin die Periodendauer der radialen Oszillation als Funktion von $U(r_0)$ und dessen Ableitungen.
- Zur Beschreibung von Wechselwirkungen, deren Austauschteilchen massebehaftet sind, ist in guter Näherung das Potential durch
$$U(r) = -\frac{GM}{r}\exp(-kr)$$
gegeben. Dieses Potential wird *Yukawa-Potential* genannt.
Zeigen Sie, dass es im Falle $r > (2k)^{-1}(1+\sqrt{5})$ keine stabilen kreisförmigen Bahnen geben kann.
- Zeigen Sie, dass bei einer Bewegung in einem Yukawa-Potential geschlossene Bahnen mit positiver Energie existieren. Es soll hier angenommen werden, dass $U(r \to \infty) = 0$ gilt.

4.3 Bewegung um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch (***),
Aufgabe aus Qualifying Exam (2008) der Stanford University

Die Bewegung eines Teilchens um ein nicht rotierendes schwarzes Loch herum kann als Bewegung in einem pseudo-Newtonschen Gravitationspotential der Form
$$\Psi(r) = -\frac{GM}{r - r^*} \quad (r > r^*)$$
genähert werden. Im folgenden soll nur der Bereich außerhalb des Ereignishorizonts $r^* = 2GM/c^2$ betrachtet werden. Weiterhin bezeichne M die Masse des schwarzen Loches und $m \ll M$ die Masse des Teilchens.

- Welche erhaltenen Größen gibt es und mit welchen Symmetrien des Systems sind sie verknüpft?
- Leiten Sie einen Ausdruck für das effektive Potential $U_{eff}(l, r)$ her. Hierbei bezeichne l den Betrag des Drehimpulses des Teilchens.
Führen sie die Abkürzungen $\alpha := cl/GMm$ und $x := r/r^*$ ein und skizzieren Sie die Funktion $x \mapsto U_{eff}(l, xr^*)/mc^2$ für einige Werte von α im Bereich von $0 - 5$.
Hinweis: Das effektive Potential ist definiert über
$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(l, r)$$
Hierbei bezeichnet E die Gesamtenergie des Teilchens.

- Für welche Werte von r existieren kreisförmige Bahnen? Wie lautet die Winkelgeschwindigkeit $\Omega(r)$ eines Teilchens auf einer solchen Bahn?
- Für welche Werte von r sind die kreisförmigen Bahnen instabil?
- Für welche Werte von α wird ein Teilchen aus großer Entfernung mit der Energie $E = 0$ vom schwarzen Loch verschluckt?

5 Streuung von Teilchen

5.1 Sturz in die Sonne (Klausuraufgabe) (*)

Ein punktförmiger Komet der Masse m bewegt sich im Gravitationsfeld der Sonne (Masse M, Radius R). Die Energie der Relativbewegung zwischen Komet und Sonne sei E.

- Geben Sie den Relativimpuls q zwischen Komet und Sonne für den Abstand $r \to \infty$ an und drücken Sie den Bahndrehimpuls l durch q und den Stoßparameter b aus.
- Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit der Komet in die Sonne stürzt? Bestimmen Sie den kritischen Stoßparameter b_0, bei dem dies eintritt. Wann kann ein punktförmiger Komet in eine punktförmige Sonne stürzen?
- Zeigen Sie, dass der totale Wirkungsquerschnitt für den Sturz gegeben ist durch

  $$\sigma_{tot} = \pi R^2 \left(1 - \frac{U(R)}{E}\right)$$

  wobei $U(R)$ die potentielle Energie am Rand der Sonne ist. Diskutieren Sie das Ergebnis.

5.2 Transformation des differentiellen Wirkungsquerschnitt (***)

Betrachten Sie zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2, die über ein Potential der Form $U(r)$ wechselwirken. Hierbei bezeichne r den relativen Abstand der beiden Teilchen. In dieser Aufgabe soll eine Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Laborsystem hergeleitet werden, wenn er im Schwerpunktsystem bekannt ist.

- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für beide Teilchen auf und zeigen Sie, dass sich diese durch eine Transformation ins Schwerpunktsystem entkoppeln.
- Betrachten Sie nun folgenden Stoßprozess in zwei Dimensionen: Ein Teilchen der Masse m_1 streut elastisch an einem zweiten, ruhenden Teilchen der Masse m_2. Der Stoß werde durch ein beliebiges Potential bestimmt.

  Bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit des Projektils nach dem Stoß, wenn das Projektil um einen Winkel ϕ gestreut wird. Ferner lösen Sie auch das inverse Problem, bestimmen Sie also den Ablenkwinkel ϕ für eine gegebene Streugeschwindigkeit v des Projektils.
- Angenommen, die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung wäre gelöst und es ergibt sich bei einem Stoßparameter b der Ablenkwinkel $\theta(b)$. Benutzen Sie die Transformation aus der ersten Teilaufgabe und das Ergebnis der zweiten Teilaufgabe um den Ablenkwinkel $\phi(b)$ im Laborsystem zu bestimmen. Interpretieren Sie das Ergebnis.
- Finden Sie einen Zusammenhang zwischen den differentiellen Wirkungsquerschnitten $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Labor}$ im Laborsystem und $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Schwerpunkt}$ im Schwerpunktsystem.