

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* 2009

Newtonsche Mechanik und Keplerproblem

Vorlesungskript für den 9. Februar 2009

Sebastian Konopka

Inhaltsverzeichnis

1	Kinematik eines Massepunktes	2
1.1	Koordinaten- und Bezugssysteme	2
1.2	Die Bahngleichung, Geschwindigkeit und Beschleunigung	3
2	Dynamik eines Massenpunktes	4
2.1	Die drei Newtonschen Axiome	4
2.2	Schwerpunktskoordinaten	6
2.3	Kraftfelder	6
3	Bewegung in einem Zentralpotential	7
3.1	Allgemeine Betrachtung	8
3.2	Bestimmung der Bahngleichung	8
3.3	Stabilitätsanalyse von Kreisbahnen	10
4	Das Keplerproblem	10
4.1	Die Beschreibung des Problems	11
4.2	Lösung der Bewegungsgleichung für die Relativbewegung	11
4.3	Das zweite und dritte Keplersche Gesetz	12
5	Streuung von Teilchen	13
5.1	Definitionen und wichtige Begriffe	13
5.2	Streuung an rotationssymmetrischen Potentialen	14
5.3	Beispiel: Streuung am Coulombpotential	14

1 Kinematik eines Massepunktes

Die *Kinematik* ist der Teil einer Theorie, der sich mit der Beschreibung eines Bewegungsablaufes befasst. Die Kinematik der *klassischen Mechanik* beschäftigt sich mit der Beschreibung von Bahnkurven eines Massepunktes. Dabei steht nicht die Frage im Vordergrund, auf welche Weise eine Bahnkurve zustande kommt, sondern damit, wie eine solche Bahnkurve darzustellen ist und welche Eigenschaften sie hat. Warum nun gerade diese oder jene Bahn in der Realität genommen wird, ist Thema der Dynamik, die im nächsten Abschnitt behandelt wird.

1.1 Koordinaten- und Bezugssysteme

Die ganze Physik spielt sich in Raum und in der Zeit ab. Der Erfahrung nach braucht man zur eindeutigen Beschreibung einer Position im Raum stets ein Zahlentripel. Wie man diese Zuordnung zwischen den Positionen und den Zahlentripeln trifft, ist allerdings weitgehend willkürlich. Um allerdings eine solide Arbeitsgrundlage zu bekommen müssen an den Raum bestimmte Anforderungen gestellt werden. Der Raum für sich wird in der Physik meist als *homogen* und *isotrop* angenommen. Diese Eigenschaften lassen sich mathematisch am besten durch den Vektorraum \mathbb{R}^3 modellieren.

Zum Beschreiben eines bestimmten Prozesses werden immer *Beobachter* gebraucht, auch wenn diese nur Denkmodelle sind. Setzt man nun einen Beobachter in einen beliebigen Punkt P des Raumes und orientiert die kanonische Basis des \mathbb{R}^3 beliebig, so können bezüglich dieses Punktes und der festgelegten Richtungen physikalische Prozesses eindeutig beschrieben werden. Ein Beobachter und das Koordinatendreieck zusammen legen ein *Bezugssystem* fest. Ein beliebiger Punkt im Raum wird von diesem Beobachter, oder in diesem Bezugssystem gemessen zu:

$$\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

Manchmal ist es allerdings sinnvoll statt der kartesischen Koordinaten andere Koordinaten zu verwenden. Damit diese sinnvoll sind, müssen diese einigen Anforderungen erfüllen:

Definition 1.1 (Koordinatentransformation) Eine Abbildung $\Psi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *Koordinatentransformation genau dann, wenn gilt:*

1. Ψ ist (fast) bijektiv
2. $D\Psi(x)$ ist für (fast) alle $x \in T$ surjektiv
3. Ψ ist hinreichend oft differenzierbar

Obige Definition stellt keine exakte mathematische Definition dar, ist aber für die Zwecke dieser Vorlesung ausreichend. Dem einen oder anderen wird diese Definition an die Definition der *Karte* von Mannigfaltigkeiten erinnern.

Durch die erste Eigenschaft wird sichergestellt, dass jedem Zahlentripel genau ein Punkt zugeordnet wird. Die zweite Eigenschaft stellt sicher, dass man an fast jedem Punkt im Raum eine lokale Basis angeben kann. Eine solche Basis ist beispielsweise durch die drei Vektoren $\{\frac{\partial \Psi}{\partial t_i}\}_{i=1,2,3}$ gegeben. Im allgemeinen wird diese sogenannte *natürliche Basis* des Koordinatensystems nicht orthonormiert sein. Es gibt allerdings nichts, das es verbieten könnte diese drei, linear unabhängigen Vektoren zu orthonormieren.

Im folgenden sollen zwei Beispiele für Koordinatentransformationen angegeben werden:

Zylinderkoordinaten Hier definiert man $\Psi : [0, \infty) \times S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Psi(r, \phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$. Eine orthonormierte Basis lautet hier:

$$\vec{e}_r = (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad \vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z \quad (1)$$

Kugelkoordinaten auch sphärische Polarkoordinaten genannt, sind durch die Koordinatentransformation $\Psi : [0, \infty) \times [0, \pi] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Psi(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$ definiert. Eine orthonormale Basis soll in der Übung bestimmt werden.

Neben dem Raum spielt auch die Zeit eine große Rolle in der Physik. In der klassischen Mechanik wird diese allerdings als kontinuierlich veränderlicher Parameter behandelt. Es bleibt noch zu bemerken, dass deswegen auch die Koordinatentransformationen von der Zeit abhängen dürfen. Weiterhin kann zwischen zwei Bezugssystemen stets eine geeignete Koordinatentransformation gefunden werden, um die Koordinaten umzurechnen.

Angenommen es gelte folgendes Problem zu lösen: In einem kartesischen Koordinatensystem $\Psi(x', y', z')$ sei eine Kurve folgender Art gegeben $x' = vt, y' = 0, z' = 0$. Die Aufgabe ist es nun diese Kurve in einem kartesischen Koordinatensystem $\Phi(x, y, z; t)$ darzustellen, dass durch folgende Formel gegeben ist $\Phi(x, y, z; t) = (x \cos \omega t - y \sin \omega t, x \sin \omega t + y \cos \omega t, z)$. Zur Lösung dieses Problems kann man benutzen, dass beide Koordinatensysteme denselben physikalischen Punkt bezeichnen müssen. Daher findet man:

$$\begin{aligned}\Psi(vt, 0, 0) &= \Phi(x, y, z; t) \\ (x, y, z)(t) &= (vt \cos \omega t, -vt \sin \omega t, 0) = \Phi^{-1}(\Psi(vt, 0, 0))\end{aligned}$$

Im Ψ -Koordinatensystem stellt die Bahn des Massepunktes eine Gerade in x' -Richtung dar. Aus der Definition des Koordinatensystems Φ erkennt man, dass es sich um Drehung um die z -Achse um den Winkel ωt handelt. Eine solche Umrechnung der Koordinaten wird Koordinatentransformation genannt. Es muss allerdings hier darauf geachtet werden, dass im obigen Fall lediglich die Koordinaten transformiert wurden. Für obiges Problem war dies ausreichend, da nur gefragt wurde, wie die Kurve in dem rotierten Koordinatensystem aussähe.

Ist allerdings nach einer Transformation der Bahngleichung $\vec{r}'(t)$ gefragt, so muss auch von der Basis des Ψ -Koordinatensystems in eine des Φ -Koordinatensystems übergegangen werden, da andernfalls eine Mischung aus Abhängigkeiten von beiden Koordinaten bestehen würden, denn die Einheitsvektoren können bei der Bahngleichung auch von den Koordinaten abhängen. Dazu soll zuerst definiert werden, was eine Bahngleichung überhaupt ist.

1.2 Die Bahngleichung, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Bewegt sich ein Massepunkt im physikalischen Raum, so ist seine Bahnkurve unabhängig von irgendwelchen Koordinatensystemen. Allerdings hängt die beobachtete Bahn natürlich von der Wahl des Koordinatensystems ab, sodass ein Beobachter, der durch seine Beobachtung unvermeidlich ein Koordinatensystem auswählt, je nach Koordinatensystem, oder auch Bezugssystem, andere Bahnverläufe wahrnehmen würde. Allerdings durchläuft ein Massepunkt stets dieselbe Bahn von physikalischen Punkten, denn eine Beobachtung sollte den Verlauf, zumindest in der klassischen Mechanik, nicht beeinflussen. Darum definieren wir:

Definition 1.2 (Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung) Sei Ψ ein Koordinatensystem. In diesem Koordinatensystem werde eine Kurve $x(t)$ für die Bahn des Teilchens gemessen. Dann heißt

Bahnkurve die Abbildung $\vec{r}(t) := \Psi(x(t))$,

Geschwindigkeit die Ableitung $\vec{v}(t) := \dot{\vec{r}}(t)$ und

Beschleunigung die zweite Ableitung $\vec{a}(t) := \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

Nach obiger Argumentation ist klar, dass diese Größen unabhängig vom gewählten Koordinatensystem sein müssen. Zur Veranschaulichung soll folgendes Beispiel dienen:

Ein Teilchen bewege sich in dem Koordinatensystem $\Psi(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ auf einer Kurve $r(t) = R, \phi(t) = \omega t$. Stellen Sie die Bahn Gleichung $\vec{r}(t)$ in der orthonormierten, natürlichen Basis des Koordinatensystems Ψ dar, berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t)$.

Lösung: Die orthonormierte, natürliche Basis dieses Koordinatensystems lautet:

$$\vec{e}_r = (\cos \phi, \sin \phi), \quad \vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi)$$

Damit lautet die Bahnkurve $\vec{r}(t) = R\vec{e}_r$. Die Geschwindigkeit ergibt sich durch Differentiation dieser Gleichung nach der Zeit. Allerdings muss hier berücksichtigt werden, dass der Vektor \vec{e}_r vom Winkel ϕ abhängig ist und dieser wiederum von der Zeit. Es folgt:

$$\vec{v}(t) = R\omega\vec{e}_\phi, \quad \vec{a}(t) = -R\omega^2\vec{e}_r$$

2 Dynamik eines Massenpunktes

Die Dynamik ist der zweite Teil einer physikalischen Theorie. Während die Kinematik sich allgemein mit der Beschreibung von Bewegungsabläufen befasst und keine Möglichkeit liefert, die Bahnkurve unter gegebenen Bedingungen zu bestimmen, erlaubt die Dynamik dieses. Die Dynamik befasst sich mit der Bestimmung der Bahnkurve aus gegebenen physikalischen Umständen. Hierzu wurden in der klassischen Mechanik mehrere, äquivalente Verfahren entwickelt. Das älteste dieser Verfahren ist die Mechanik nach Newton. Weitere Verfahren sind die Lagrangesche Mechanik, die Hamiltonsche Mechanik und die Mechanik nach Hamilton und Jacobi, die wohl zu den elegantesten Formulierungen gehört. Prinzipiell sind aber alle diese Methoden äquivalent. Die ersten beiden Methoden werden etwas später in dieser Vorlesung noch behandelt werden.

2.1 Die drei Newtonschen Axiome

Die *Newtonsche Mechanik* wurde im Jahre 1686(?) von Isaac Newton in seiner berühmten Veröffentlichung *philosophiae naturalis principia mathematica* erstmals niedergeschrieben:

Erstes Axiom Ein Massepunkt verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung solange keine Kräfte auf ihn wirken.

Zweites Axiom Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so ist diese gleich der Änderung der Bewegungsgröße des Massepunktes.

Drittes Axiom Übt ein Körper eine Kraft auf einen anderen aus, so übt dieser eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft auf ersteren aus. (*actio = reactio*).

In Newtons Schrift wird mit dem Begriff Bewegungsgröße das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers bezeichnet. Heute bezeichnet man dieses Produkt mit dem Namen *Impuls*. Jetzt sollen zwei wichtige, mechanische Größen definiert werden:

Definition 2.1 (Impuls und Drehimpuls) *Bezeichne $\vec{r}(t)$ die Bahn eines Massepunktes mit der Masse m . Dann heißt*

- *das Produkt $m \cdot \vec{v}(t) =: \vec{p}(t)$ der Impuls des Teilchens zum Zeitpunkt t .*
- *das äußere Produkt $\vec{r}(t) \wedge \vec{p}(t) =: \vec{l}(t)$ der Drehimpuls des Teilchens zum Zeitpunkt t .*

In die Sprache der modernen Mathematik übersetzt kann also das zweite Newtonsche Axiom folgendermaßen geschrieben werden:

$$\vec{F}(t) = \dot{\vec{p}}(t) \quad \forall t \tag{2}$$

Im Abschnitt über Koordinatensysteme wurde gezeigt, dass eine gleichförmige Bewegung in einem Koordinatensystem nicht unbedingt gleichförmig in einem anderen Koordinatensystem erscheinen muss. Hierbei soll unter einer gleichförmigen Bewegung eine Bahnkurve der Form $\vec{r}(t) = \vec{v}t + \vec{r}_0$ mit konstantem Vektor \vec{v} verstanden werden.

Definition 2.2 (Inertialsystem) *Ein Bezugssystem, in dem das zweite Newtonsche Axiom gilt, heißt Inertialsystem.*

Umgangssprachlich gesprochen bedeutet dies, dass Inertialsysteme nicht beschleunigt sind.

Insbesondere lassen sich zwei Inertialsysteme stets durch eine spezielle Koordinatentransformation ineinander überführen. Solche Transformationen bezeichnet man als *Galilei-Transformation*. Man muss sich stets vor Augen führen, dass die Newtonschen Axiome in dieser Form sich auf die einzelnen kartesischen Koordinaten nur in Inertialsystemen übertragen lassen. In allen anderen Fällen treten sogenannte *Scheinkräfte* auf.

Jetzt sollen als Beispiel die Newtonschen Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten formuliert werden:

Es wurde bereits abgeleitet, dass eine sinnvolle Basis in Zylinderkoordinaten durch die drei Vektoren $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z\}$ gegeben ist. Offenbar kann der Ortsvektor \vec{r} zu jedem Zeitpunkt folgendermaßen geschrieben werden:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

Es ist hierbei stets zu beachten, dass die Basis stets lokal am Ort \vec{r} gebildet wird und der Vektor hiernach entwickelt wird. Für eine nicht konstante Bewegung sind deshalb die Einheitsvektoren auch zeitabhängig. Gleichung (1) stellt die Entwicklung der Basisvektoren nach der kartesischen Basis dar. Durch Differentiation erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a}(t) &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten lauten daher:

$$m\ddot{r}\vec{e}_r + m\ddot{z}\vec{e}_z = \vec{F} + mr\dot{\phi}^2\vec{e}_r - m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{e}_\phi \quad (3)$$

Nimmt man an, dass sich ein Teilchen auf einer Kreisbahn mit Radius R um die z -Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω herum bewege, so kann man sicherlich $\phi = \omega t$ annehmen. Setzt man diese Bedingung in obige Bewegungsgleichung ein, so verkürzt sich diese zu:

$$0 = \vec{F} + mr\omega^2\vec{e}_r$$

Damit eine solche Bewegung möglich ist, muss offensichtlich eine Kraft \vec{F} auf das Teilchen wirken. Diese kann sogar bestimmt werden und man erhält $\vec{F} = -mr\omega^2\vec{e}_r$. Diese Kraft bezeichnet man als *Zentripetalkraft*. In den Zylinderkoordinatensystem beschreibt das Teilchen eine gleichförmige Bewegung, im Inertialsystem dagegen nicht. Definiert man nun ein neues Bezugssystem, dessen Ursprung im Ursprung des alten Bezugssystems liegt und dessen x' -Achse stets in Richtung \vec{e}_r zeige, sowie die z' -Achse in Richtung der z -Achse, so beschreibt das Teilchen in diesem Bezugssystem eine gleichförmige Bewegung, obwohl Kräfte auf das Teilchen wirken. Das zweite Newtonsche Axiom gilt nur in Inertialsystemen.

Abschließend soll noch eine Übersicht über das Aufstellen von Bewegungsgleichungen in der Newtonschen Mechanik gegeben werden:

1. Wählen Sie ein geeignetes Bezugssystem zur Beschreibung der Prozesse. Im Idealfall handelt es sich hierbei um ein Inertialsystem.
2. Finden Sie *alle* Kräfte, die auf die Teilchen wirken. Hierbei sind auch sogenannte *Zwangskräfte* zu berücksichtigen und reactio-Kräfte nach dem dritten Newtonschen Axiom.
3. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen nach dem zweiten Newtonschen Axiom auf.

2.2 Schwerpunktskoordinaten

Betrachtet man Prozesse, die zwei Teilchen beinhalten, so ist es häufig vorteilhaft sogenannte *Schwerpunktskoordinaten* einzuführen. Diese sind mit den Teilchenkoordinaten verknüpft über:

$$\vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

$$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (5)$$

Hierbei bezeichnet man \vec{R} als *Schwerpunktskoordinate* und \vec{r} als *Relativabstand*. Die Umkehrtransformation ist gegeben durch:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (6)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (7)$$

Diese Koordinaten sind insbesondere dann nützlich, wenn die Wechselwirkung zwischen den Teilchen nur von deren relativer Orientierung und Abstand abhängt. In diesem Fall werden die Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

separiert zu:

$$\ddot{\vec{R}} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \quad (9)$$

Den Term $m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}$ bezeichnet man auch als *reduzierte Masse*. Man erkennt sofort, dass die Wechselwirkung keinerlei Einfluss auf die Schwerpunktsbewegung hat.

2.3 Kraftfelder

Kraftfelder spielen in der Physik eine große Rolle, denn sie alleine bestimmen das Verhalten eines physikalischen Systems. Die allgemeinste Bewegungsgleichung lautet:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$$

Im folgenden soll nur ein Teilchen in einem Kraftfeld behandelt werden. Die Überlegungen lassen sich analog auf beliebig viele Teilchen übertragen. Umgekehrt lässt sich jedes klassische Problem in obiger Form darstellen, wobei eventuell noch die Zeit als Parameter hinzukommt. Angenommen durch $\vec{r}(t)$ ist eine Lösung obiger Differentialgleichung gegeben. Zur Analyse des Verhaltens der Lösung kann man die Differentialgleichung skalar mit der Geschwindigkeit multiplizieren und dann von t_0 bis t integrieren. Man erhält:

$$\frac{1}{2} m \left(\dot{\vec{r}}(t)^2 - \dot{\vec{r}}(t_0)^2 \right) - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (10)$$

Zur weiteren Analyse kann man folgende Begriffe definieren:

Definition 2.3 (Energie und Arbeit) Sei $\vec{r}(t)$ die Bahn eines Teilchens der Masse m . Dann wird definiert:

kinetische Energie:

$$E_{kin} := \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}(t)^2$$

Arbeit:

$$W_\gamma := \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Mit diesen Begriffen lautet Gleichung (10) nun:

$$\Delta E_{kin} = W_\gamma$$

Die Änderung der kinetischen Energie entspricht also gerade der am System geleisteten Arbeit.

Unter speziellen Voraussetzungen an das Kraftfeld wird das Arbeitsintegral unabhängig vom Integrationsweg. Kraftfelder, die diese Voraussetzungen erfüllen, heißen *konservativ*.

In der Analysis gibt es dazu folgenden Satz:

Satz 2.1 (Kriterien für konservative Kraftfelder) Sei $\vec{F} : T \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Kraftfeld. Dann sind je zwei der folgenden Bedingungen äquivalent:

1. \vec{F} ist konservativ

2. Für jede geschlossene Kurve γ gilt:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

3. Es gibt eine Funktion $U : T \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$\vec{F} = \text{grad } U$$

4. T einfach wegzusammenhängend und es gilt:

$$\text{rot } \vec{F} = 0$$

Ist im zuvor betrachteten Fall das Kraftfeld konservativ, so kann Gleichung (10) auch geschrieben werden als:

$$E_{kin}(t) + U(\vec{r}(t)) = E_{kin}(t_0) + U(\vec{r}(t_0)) =: E$$

Die Größe E heißt Gesamtenergie des Systems und ist im Fall eines konservativen Kraftfeldes offenbar erhalten.

3 Bewegung in einem Zentralpotential

Ein wichtiger Spezialfall der Newtonschen Mechanik ist die Bewegung in einem konservativen Kraftfeld, dessen Potential rotationssymmetrisch ist. Dies bedeutet die Bewegungsgleichung lässt sich schreiben als:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\text{grad } U(r)$$

3.1 Allgemeine Betrachtung

Angenommen durch $\vec{r}(t)$ ist eine Lösung dieser Differentialgleichung zu den Anfangsbedingungen $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$ und $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$. Es sollen nun die Bahnen auf Erhaltungsgrößen untersucht werden. Multipliziert man die Bewegungsgleichung mit $\dot{\vec{r}}$ und integriert von 0 bis t , so findet man:

$$\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}(t)^2 + U(r(t)) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}(0)^2 + U(r(0)) =: E \quad (11)$$

Die Größe E heißt *Energie* und ist offensichtlich für alle Zeitpunkte konstant.

Neben der Energie gibt es für die Bewegung in einem solchen Potential noch eine weitere wichtige Erhaltungsgröße, den sogenannten *Drehimpuls*. Bildet man das Kreuzprodukt mit dem Ortsvektor \vec{r} auf beiden Seiten der Bewegungsgleichung, so führt dies zu folgender Gleichung:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{p}} = m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$$

Die linke Seite ist aber gleich der zeitlichen Ableitung der Größe

$$\vec{l} := \vec{r} \times \vec{p}$$

Diese Größe heißt *Drehimpuls* der Teilchenbewegung. Die Erhaltung dieser Größe hat wichtige Konsequenzen für die Behandlung des Problems. Zum einen erkennt man aus der Erhaltung des Drehimpuls, dass stets Orts- und Impulsvektor in einer Ebene liegen müssen. Eine Bewegung senkrecht zur Ebene ist nicht möglich. Aus diesem Grund reduziert sich das Problem auf ein zweidimensionales. Ohne Einschränkung kann diese Ebene als $x - y$ -Ebene gewählt, denn dies kann wegen der Rotationsinvarianz des Problems stets durch eine geeignete Drehung des Koordinatensystems erreicht werden. Ferner muss die Teilchenbahn stets in einer Ebene enthalten sein, die den Ursprung enthält. Andernfalls wäre die Rotationssymmetrie gebrochen.

Eine geschickte Koordinatenwahl sind hier Zylinderkoordinaten, deren z -Achse in Richtung des Drehimpulsvektors zeigt. Alle bisherigen Überlegungen sind natürlich nur dann richtig, wenn der Drehimpuls des Teilchens von null verschieden ist. In diesem Fall müssen aber Impuls- und Ortsvektor stets parallel sein. Die Bewegung läuft also auf einer Geraden ab. Nun zurück zur Koordinatenwahl. Für die Bahn gilt offenbar $z = 0$, sodass die Erhaltungssätze sich ergeben zu:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + U(r) = E \quad (12)$$

$$mr^2\dot{\phi} = l \quad (13)$$

Mit Hilfe von (13) kann die $\dot{\phi}$ -Abhängigkeit der Energieerhaltung eliminiert werden und führt zu:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = E \quad (14)$$

$$U_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \quad (15)$$

Hierbei wurde das sogenannte *effektive Potential* eingeführt. Betrachtet man die Bewegung in radialer Richtung als eindimensionale Bewegung, so wird diese durch das effektive Potential bestimmt. Für die Analyse der Stabilität von Kreisbahnen ist dieses Potential sehr wichtig.

3.2 Bestimmung der Bahngleichung

Die Bewegungsgleichung für die radiale Richtung (14) kann integriert werden. Eine implizite Lösung ist gegeben durch:

$$t = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r))}} \quad (16)$$

Es stellt nun sich die Frage nach dem Vorzeichen des Integrals. Aus Stetigkeitsgründen ist ein Wechsel des Vorzeichens nur an Stellen möglich, die durch $E = U_{eff}(r)$ definiert sind. Dies sind allerdings gerade die Punkte an denen das Teilchen zur Ruhe kommt. In vielen Fällen wechselt die Lösung das Vorzeichen an diesen Punkten das Vorzeichen, da die Potentiale meist monoton sind und daher irgendwann $\dot{r}^2 < 0$ gelten müsste, was in der Mechanik unmöglich ist.

Gleichung (16) ist meist nicht elementar integrierbar. Meist interessiert aber der genaue Zeitablauf der Bewegung gar nicht, sondern lediglich die Form der Bahn ist von Interesse. Es soll nun eine Bahnkurve der Form $r(\phi(t)) = r(t)$ gesucht werden. Es wurde bereits gezeigt, dass eine implizite Lösung des Problems existiert. Deshalb soll nun angenommen werden, dass bereits eine Lösung der Form $r(\phi)$ gefunden wurde. Mit Hilfe der Kettenregel findet man:

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \pm \frac{r^2}{l} \sqrt{2m(E - U_{eff}(r))} \quad (17)$$

Diese Differentialgleichung kann wieder implizit gelöst werden und liefert:

$$\phi - \phi_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U_{eff}(r))}} \quad (18)$$

In Gleichung (17) wurde implizit der Satz über die Umkehrfunktion angewendet. Wenn die Bewegung einen Drehimpuls besitzt, so folgt aus Gleichung (13) unmittelbar, dass $\dot{\phi} > 0$ gilt und damit insbesondere $\dot{\phi} \neq 0$. Der Satz über die Umkehrfunktion sagt nun aus, dass die Funktion $t = \phi^{-1}(\phi)$ existiert und die Ableitung durch $\dot{\phi}^{-1}$ gegeben ist.

Zusammengefasst ergibt sich:

Satz 3.1 (Eigenschaften der Orbits eines Zentralpotentials) Gegeben Sei ein Zentralpotential $U(r)$. Dann haben die Lösungen $\vec{r}(t)$ des Anfangswertproblems

$$m\ddot{\vec{r}} = -U'(r)\frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$$

folgende Eigenschaften:

- Für die Energie $E(t) := \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}(t)^2 + U(r(t))$ gilt:

$$\frac{d}{dt}E = 0$$

- Für den Drehimpuls $\vec{l}(t) := \vec{r}(t) \times \vec{p}(t)$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\vec{l} = 0$$

- Im Fall $\vec{l} \neq 0$ gibt es eine Ebene K mit den Eigenschaften

$$\vec{r}(t) \in K, \quad \vec{p}(t) \in K \quad \forall t, \quad 0 \in K, \quad \vec{l} \perp K$$

andernfalls gilt stets

$$\vec{r}(t) \parallel \vec{p}(t) \quad \forall t$$

3.3 Stabilitätsanalyse von Kreisbahnen

Eine wichtige Anwendung vorheriger Überlegung ist die Analyse von Existenz und Stabilität von Kreisbahnen in einem Zentralpotential. Eine Kreisbahn mit Radius r_0 ist genau dann stabil, wenn $E = U_{eff}(r_0)$ gilt. Dies kann leicht aus Gleichung (14) abgelesen werden. Besitzt diese Gleichung Lösungen, so existieren Kreisbahnen mit den entsprechenden Radien. Allerdings ist diese Bedingung noch nicht hinreichend für eine Kreisbahn. Neben der verschwindenden Geschwindigkeit sollte auch die Radialgeschwindigkeit verschwinden. Andernfalls wäre zu einem kleinen Zeitpunkt später der Radius größer oder kleiner geworden. Dies führt auf die Bedingung:

$$0 = m\ddot{r} = -U'_{eff}(r)$$

Zur Analyse der Stabilität einer Kreisbahn mit Radius r_0 müssen kleine Störungen um diesen Radius betrachtet werden. Dazu soll das effektive Potential um r_0 in eine Taylorreihe entwickelt werden:

$$U_{eff}(r_0 + \epsilon) = U_{eff}(r_0) + \epsilon U'_{eff}(r_0) + \frac{1}{2} U''_{eff}(r_0) \epsilon^2 + o(\epsilon^2)$$

Berücksichtigt man die Bedingung $U'_{eff}(r_0) = 0$, so kann die Bewegungsgleichung für die Abweichung in radialer Richtung geschrieben werden als:

$$m\ddot{\epsilon} = -U''_{eff}(r_0)\epsilon + o(\epsilon)$$

Im Fall $U''_{eff}(r_0) > 0$ führt dies zu kleinen Schwingungen um die Kreisbahn und im Fall $U''_{eff}(r_0) < 0$ entfernt sich das Teilchen exponentiell von der Kreisbahn. Der Fall $U''_{eff}(r_0) = 0$ muss von Fall zu Fall untersucht werden, da eine allgemeine Aussage hierfür recht kompliziert wird.

Zusammengefasst ergibt sich folgender Satz für die Klassifikation der Kreisbahnen:

Satz 3.2 (Klassifikation der Kreisbahnen im Zentralpotential) *Gegeben sei ein Problem mit Zentralpotential. Dann ist eine Kreisbahn mit $r = r_0$ möglich, falls das effektive Potential an dieser Stelle einen stationären Punkt hat:*

$$U'_{eff}(r_0) = 0$$

Spielt zusätzlich noch die Teilchenenergie E eine Rolle, so muss auch die Bedingung

$$U_{eff}(r_0) = E$$

erfüllt sein.

Hinsichtlich der Stabilität der Kreisbahnen lassen sich folgende Aussagen treffen: Eine Kreisbahn mit Radius r_0 ist

stabil falls das effektive Potential U_{eff} an der Stelle $r = r_0$ ein lokales Minimum besitzt und

instabil falls das effektive Potential U_{eff} an der Stelle $r = r_0$ ein lokales Maximum besitzt.

4 Das Keplerproblem

Eine wichtige Anwendung des Newtonschen Gravitationsgesetz ist die richtige Beschreibung der Planetenbahnen. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die Bahnen in einem Newtonschen Gravitationspotential Kegelschnitte sind. Weiterhin sollen auch die anderen beiden Keplerschen Gesetze hergeleitet werden.

Ohne Begründung soll hier die Gravitationskraft eines Teilchens der Masse m_1 auf ein Teilchen der Masse m_2 angegeben werden:

$$\vec{F} = \gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3}$$

4.1 Die Beschreibung des Problems

Das Keplerproblem besteht darin, die Bewegungsgleichungen für zwei Körper zu lösen, die gravitativ gekoppelt sind. Aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz und aus den Newtonschen Axiomen leitet man ab:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\gamma m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (19)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\gamma m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (20)$$

Die Kraft zwischen den Massen hängt offensichtlich nur von deren relativen Abstand ab. Es ist daher sinnvoll Schwerpunktskoordinaten einzuführen. Wenn mit μ die reduzierte Masse bezeichnet wird, folgt so für die Relativbewegung:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (21)$$

4.2 Lösung der Bewegungsgleichung für die Relativbewegung

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem Lösen von (21). Offenbar kann diese Gleichung in der Form:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\text{grad } U(r)$$

geschrieben werden mit $U(r) = -\gamma m_1 m_2 r^{-1}$. Gleichungen dieser Art wurden im vorangegangenen Abschnitt besprochen. Es wurde dort gezeigt, dass der Drehimpuls und die Energie der Relativbewegung erhalten ist. Die Bahngleichung kann daher aus (17) gewonnen werden:

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{r^2}{l} \sqrt{2\mu \left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - U(r) \right)}$$

Diese Differentialgleichung kann mit der Methode der Separation der Variablen gelöst werden. Man findet:

$$\begin{aligned} \phi - \phi_0 &= \pm \int_{r_0}^r \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu \left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - U(r) \right)}} \\ &= \pm \int_{r_0}^r \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu \left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} + \gamma m_1 m_2 \frac{1}{r} \right)}} \end{aligned}$$

Um das letzte Integral übersichtlich auswerten zu können sollen nun folgende Abkürzungen eingeführt werden:

$$\begin{aligned} \alpha &:= \gamma m_1 m_2 \\ p &:= \frac{l^2}{\mu \alpha} \\ \epsilon &:= \sqrt{1 + 2 \frac{E l^2}{\mu \alpha^2}} \end{aligned}$$

Diese Abkürzungen werden sich als nützlich erweisen. Nun kann man folgende Substitution durchführen:

$$x := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$$

Diese führt zu dem Integral:

$$\phi - \phi_0 = \mp \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - x^2}} = \pm \arccos \frac{px}{\epsilon} \Big|_{x_0}^x$$

Prinzipiell kann diese Gleichung nach dem Radius r aufgelöst werden. Es sollen aber hier noch einige Vereinfachungen durchgeführt werden. Die Winkel sollen ab jetzt so gemessen werden, dass ϕ der Winkel zwischen dem Fahrstrahl und dem Halbstrahl, der vom Ursprung durch die Periapsis geht, ist. Damit erhält man auch den Wert für x_0 , da dieser direkt mit dem Periapsisabstand verknüpft ist.

Um den Periapsisabstand zu bestimmen kann man benutzen, dass in der Periapsis die Radialgeschwindigkeit verschwindet. Weiterhin kann man den Radius wieder durch x ausdrücken und erhält:

$$E = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$x^2 = \frac{\epsilon^2}{p^2}$$

Offensichtlich muss man die positive Lösung dieser Gleichung verwenden, da kleinere Werte von r zu immer größeren Werten von x führen, wie man aus der Definition von x leicht ablesen kann. Somit ergibt sich für die Bahn:

$$\cos \phi = \frac{px}{\epsilon}$$

Aufgelöst nach r findet sich folgende Bahngleichung:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

Aus der Geometrie ist aber bekannt dass diese Gleichung gerade die Kegelschnitte in Polarkoordinaten darstellt. Damit ist der erste Keplersche Satz gezeigt:

Satz 4.1 *Erstes Keplersches Gesetz* Alle Satelliten eines astronomischen Körpers bewegen sich auf Kegelschnitten. Insbesondere bewegen sich die Planeten auf elliptischen Bahnen.

4.3 Das zweite und dritte Keplersche Gesetz

In diesem Abschnitt soll das zweite und das dritte Keplersche Gesetz gezeigt werden. Diese Gesetze geben einen Zusammenhang zwischen den Umlaufzeiten und der Bahngeometrie an.

Satz 4.2 (Zweites Keplersches Gesetz) *Ein Satellit eines astronomischen Körpers bewegt sich so, dass der Fahrstrahl in gleicher Zeit stets die gleiche Fläche überstreicht.*

Satz 4.3 (Drittes Keplersches Gesetz) *Die Quadrate der Umlaufzeiten von Satelliten auf gebundenen Bahnen verhalten sich so, wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Ellipsenbahn.*

Das zweite Keplersche Gesetz drückt im Prinzip nur die Drehimpulserhaltung beim Keplerproblem aus. Zum Beweis dieses Satzes kann die *Leibnizsche Sektorenformel* zur Berechnung der zwischen den Zeiten t_1 und t_2 überstrichenen Fläche verwendet werden:

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt = \frac{1}{2\mu} \int_{t_1}^{t_2} l dt = \frac{l}{2\mu} (t_2 - t_1)$$

Da der Drehimpuls l eine Erhaltungsgröße ist, folgt sofort der zweite Keplersche Satz.

Mit diesem Ergebnis lässt sich auch leicht der dritte Keplersche Satz beweisen. Wenn a und b die Hauptachsen der Ellipsenbahn sind und T die Umlaufdauer, so findet man:

$$\frac{lT}{2\mu} = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = \pi a^2 \sqrt{\frac{p}{a}}$$

$$T^2 = \frac{4\mu^2}{l^2} \pi^2 p a^3 = \frac{4\pi^2 \mu}{\alpha} a^3$$

Man erkennt, dass das dritte Keplersche Gesetz nur im Fall $m_2 \gg m_1$ gilt, also bei einem schweren Zentrum. Im allgemeinen Fall stimmt das dritte Keplersche Gesetz nicht und das Verhältnis wird massenabhängig.

5 Streuung von Teilchen

Für die experimentelle Untersuchung von Strukturen im subatomaren Bereich werden sehr häufig Streuexperimente durchgeführt. Allerdings wird die Dynamik in diesen Größenskalen nur durch die *Quantenmechanik* richtig beschrieben. Hier soll eine Diskussion von Streuexperimenten lediglich mit Hilfe der klassischen Mechanik erfolgen. Dennoch sind die Ergebnisse bis in den atomaren Bereich hin anwendbar, wenn die Projektilenergien groß genug sind. Ein berühmtes Beispiel hierfür ist das Rutherford'sche Streuexperiment, das entscheidend zur Aufklärung der Struktur der Atome beitrug.

5.1 Definitionen und wichtige Begriffe

Zuerst sollen einige wichtige Begriffe und Definition bei Streuexperimenten eingeführt werden. Streuexperimente laufen im Allgemeinen so ab, dass ein Strahl aus Teilchen einer Sorte auf das zu untersuchende Material geschossen wird und die Menge der in eine Richtung gestreuten Teilchen gezählt wird.

Ein Teilchen im einfallenden Strahl wird *Projektile* genannt. Der zu untersuchende Stoff heißt *Target*. Sehr wichtig für die Beschreibung Streuprozessen ist der sogenannte *differentielle Wirkungsquerschnitt*.

Definition 5.1 (Differentieller Wirkungsquerschnitt) *Betrachtet soll im folgenden ein allgemeiner Streuprozess. Sei J der Betrag der einfallenden Teilchenstromdichte. Ferner sei $\dot{N}(\Omega)$ die Zählrate in einem bestimmten Raumwinkel Ω . Man definiert dann:*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} := \frac{\dot{N}(\Omega)}{J} = \frac{\text{Zählrate in einen bestimmten Raumwinkel}}{\text{Einfallender Teilchenstrom}} \quad (22)$$

Die Größe $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ heißt *differentieller Wirkungsquerschnitt*.

Aus der Definition ist ersichtlich, dass man die theoretische Streurrate \dot{N} in einen bestimmten Raumwinkelbereich Θ aus dem einfallenden Teilchenstrom berechnen kann zu:

$$\dot{N}_{\Theta} = \int_{\Theta} J \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (23)$$

In vielen Fällen ist es nützlich die Querschnittsfläche zu finden, bei denen die Projektile überhaupt mit dem Target wechselwirken, also überhaupt abgelenkt werden. Offensichtlich ergibt sich die totale Streurrate durch Integration über den ganzen Raumwinkel. Das Verhältnis dieser Streurrate zum einfallenden Teilchenstrom ist dann die gesuchte Fläche.

Definition 5.2 (Totaler Wirkungsquerschnitt) *Der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für einen beliebigen Streuprozess sei gegeben. Dann heißt die Größe*

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (24)$$

der totale Wirkungsquerschnitt des Streuprozesses. Hierbei muss über den gesamten Raumwinkelbereich integriert werden.

Anschaulich gesprochen gibt der totale Wirkungsquerschnitt an, wie groß die Fläche auf dem Target sein muss, damit eine Wechselwirkung eintreten kann. Der totale Wirkungsquerschnitt kann dabei durchaus unendlich sein, wenn die Reichweite der Wechselwirkung zwischen Projektil und Target unbegrenzt ist. Später wird gezeigt, dass dies beispielsweise beim Keplerproblem der Fall ist.

5.2 Streuung an rotationssymmetrischen Potentialen

Einen wichtigen Spezialfall der Streuprozesse bilden solche Prozesse, bei denen die Wechselwirkung rotationsinvariant ist. Aufgrund dieser Symmetrie können die einfallenden Projektile anhand eines einzigen Parameters unterschieden werden. Eine Größe ist beispielsweise der minimale Abstand b zwischen dem Target und dem Projektil, wenn die Wechselwirkung nicht stattfinden würde. Diesen Parameter nennt man den *Stoßparameter*. Bildlich gesprochen bedeutet $b = 0$ einen zentralen Stoß und $b > 0$ einen nicht zentralen Stoß.

Ab jetzt soll nur die Wechselwirkung zwischen einem Projektil der Masse m_1 und einem Targetteilchen der Masse m_2 untersucht werden. Das Potential der Wechselwirkung zwischen den Teilchen soll nur von deren Abstand abhängen. Es wurde bereits gezeigt, dass man durch Einführen der Schwerpunktskoordinaten \vec{R} und \vec{r} , die Bewegungsgleichungen separieren kann. Ferner soll im folgenden nur der Streuprozess im Schwerpunktsystem untersucht werden. In einer Übungsaufgabe findet sich eine Herleitung der Rücktransformation ins Laborsystem. Ist das Targetteilchen allerdings sehr schwer, so kann auf diese Rücktransformation verzichtet werden.

Angenommen das Wechselwirkungspotential erlaubt ungebundene Bahnen. Weiterhin soll die Lösung der Bewegungsgleichung für die Relativbewegung ergeben, dass ein Teilchen, das mit dem Stoßparameter b eintrifft um einen Winkel $\theta(b)$ gestreut wird. Bei diesem Prozess werden keine Teilchen erzeugt oder vernichtet. Teilchen mit Stoßparametern im Bereich $[b, b + db]$ werden also in den Winkelbereich $[\theta(b), \theta(b) + \theta'(b)db]$ abgelenkt. Ist beispielsweise $\theta'(b) < 0$, so soll unter letztem Intervall $[\theta(b) + \theta'(b), \theta(b)]$ verstanden werden.

Wegen der Teilchenzahlerhaltung muss nun gelten:

$$2\pi b db = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Dies begründet sich darin, dass nach der Definition des differentiellen Wirkungsquerschnitts, der in $d\Omega$ gestreute Teilchenstrom gleich $J = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ ist und gleich der Teilchenzahl sein muss, die zwischen den Stoßparametern b und $b + db$ eintreffen.

Setzt man die Definition des Raumwinkelements in Kugelkoordinaten ein, wobei die z -Achse in Strahlrichtung zeigen soll, so findet man nach Integration über den Azimutwinkel:

$$b db = \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta$$

Setzt man noch den Zusammenhang zwischen Polarwinkel θ und dem Stoßparameter b ein, so findet sich folgende Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)|b'(\theta)|}{\sin \theta} \quad (25)$$

Der Betrag wurde eingeführt, da $b'(\theta)$ auch negativ werden kann. Es bleibt hier noch zu beachten, dass dies der Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem ist und dieser eventuelle noch ins Laborsystem transformiert werden muss.

5.3 Beispiel: Streuung am Coulombpotential

Als Beispiel soll nun die Streuung eines Teilchenstromes an einem Coulombpotential der Form $U(r) = -\alpha r^{-1}$ untersucht werden. Die Bahnen für dieses Potential ergaben sich zu:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}, \quad p = \frac{l^2}{m\alpha}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + 2 \frac{El^2}{m\alpha^2}}$$

Hierbei bezeichnet ϕ den Winkel relativ zum Strahl zwischen Periapsis und Streuzentrum. Im Fall $\epsilon > 1$ sind die Bahnen ungebunden und das Teilchen kann ins Unendliche entkommen. Aus der Bahngleichung erkennt man, dass im Fall $\cos \phi_0 = -\frac{1}{\epsilon}$ gerade die Winkel bestimmt werden, unter denen das Teilchen eintrifft und entkommt. Der Ablenkwinkel ergibt sich folglich zu:

$$\theta = 2\phi_0 - \pi$$

Löst man diese Gleichung nach ϕ_0 auf und wendet die Kosinusfunktion auf die Gleichung an, so findet man:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}$$

Der nächste Schritt ist die Bestimmung der Abhängigkeit der numerischen Exzentrizität der Bahn vom Bahnparameter bei fester Teilchenenergie E . Im unendlichen verschwindet die potentielle Energie der Wechselwirkung und die Teilchenenergie ist gleich der kinetischen Energie des Projektils im Unendlichen. Über die Definition des Drehimpulses folgt:

$$l^2 = 2mEb^2$$

Setzt man dieses Resultat in die Formel für die numerische Exzentrizität ein und diese in die Gleichung für den Ablenkwinkel θ , so findet man nach etwas Rechnen:

$$b = \frac{\alpha}{2E} \cot \frac{\theta}{2} \quad (26)$$

Unter Benutzung des Resultats (25) folgt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt bei der Coulombstreuung:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta} = \frac{\alpha^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (27)$$

Dieses Ergebnis ist auch unter dem Namen *Rutherford'sche Streuformel* bekannt. Zum Abschluss soll noch gezeigt werden, dass der totale Wirkungsquerschnitt unendlich groß ist. Dies ist zu erwarten, da die Wechselwirkungspotential unbeschränkt ist.

Aus der Definition folgt:

$$\sigma_{tot} = \frac{2\pi\alpha^2}{16E^2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\theta = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2} \int_0^\pi \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta = \frac{\pi\alpha^2}{8E^2} \int_0^1 \frac{dx}{x^3} = \infty$$