

Experimentalphysik 3 - Quanteneffekte

Matthias Brasse, Max v. Vopelius

27.02.2009

Inhaltsverzeichnis

1	Quantenphänomene	2
2	Strahlungsgesetze	2
2.1	Hohlraumstrahlung / Schwarzer Strahler	2
2.2	Temperaturstrahler und Strahlungsgesetze	3
2.3	Stefan-Boltzmann-Gesetz	3
2.4	Wien'sches Verschiebungsgesetz	3
2.5	Rayleigh-Jeans-Gesetz	3
2.6	Wien'sches Strahlungsgesetz	3
2.7	Planck'sches Strahlungsgesetz	3
3	Photoeffekt und Photonen	4
3.1	Eigenschaften von Photonen	5
3.2	Comptoneffekt	5
3.3	Bremsstrahlung, Röntgenstrahlung	6
3.4	Paarerzeugung	6

1 Quantenphänomene

Die wichtigsten Tatsachen, die sich auf die Quantisierung von Teilchen und Wellen zurückführen lassen sind:

1. Wellen zeigen Teilcheneigenschaften
z.B. Photoeffekt, Comptonstreuung
2. Teilchen zeigen Wellencharakter
z.B. Beugung und Interferenz von Elektronen, Neutronen
 - Energie eines Photons: $E_\gamma = h \cdot \nu$
 - Impuls eines Photons: $p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h \cdot \nu}{c}$
 - Allgemeiner Ansatz:

$$\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k} \text{ (de Broglie- Beziehung)}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- In Verbindung mit der speziellen Relativitätstheorie

$$E_\gamma = h \cdot \nu = mc^2$$

Das *Komplementärprinzip* besagt, dass sich niemals beide Eigenschaften des Lichts bestimmen lassen, sondern immer nur die eine oder andere. Teilchen und Welle schließen sich gegenseitig aus, sind also *komplementär*.

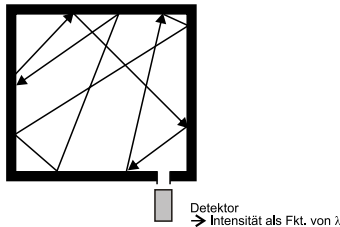
Weiter sagt die Heisenberg'sche Unschärferelation aus, dass Ort und Impuls¹ nicht beides exakt bestimmbar sind, sondern die Messung eines der beiden Werte die Messung so stark beeinflusst, dass das Produkt aus beiden Unsicherheiten immer größer als das Wirkungsquantum ist:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h$$

Bsp: Monochromatische Welle, $\Delta k_x, \Delta \omega = 0$ aber automatisch $\Delta x, \Delta t = \infty$.

2 Strahlungsgesetze

2.1 Hohlraumstrahlung / Schwarzer Strahler



- Elektromagnetische Strahlung innerhalb eines abgeschlossenen Hohlraums ist im thermischen Gleichgewicht.
- Energiedichte und Verteilung der Intensitäten auf Wellenlängen nur abhängig von der Temperatur (nicht z.B. vom Material!)
- Aus einer Öffnung tritt Hohlraumstrahlung die gleiche Intensität + Spektrum hat, wie die eines schwarzen Strahlers
- Schwarzer Strahler ist das Gegenteil eines Spiegels: ein schwarzer Strahler reflektiert keine Strahlung sondern absorbiert alle Strahlung vollständig. Die absorbierte Energie wird in Form eines *materialunabhängigen* Spektrums abgestrahlt, das temperaturabhängig ist

⇒ Verwendung von Hohlraumstrahlung zur Untersuchung und Beschreibung von Wärmestrahlung

¹sogar alle kanonisch konjugierten Variablen

2.2 Temperaturstrahler und Strahlungsgesetze

- heiße Körper (bedeutet nur $T > 0$) strahlen Licht ab wobei der Schwerpunkt sich je nach Temperatur verschiebt (Beispiel: Eisen, fängt an zu glühen ab einer bestimmten Temperatur, das bedeutet dass der Schwerpunkt ins sichtbare Spektrum verschoben ist).
- Das Wellenlängenspektrum der Schwarzkörperstrahlung² ist kontinuierlich mit ausgeprägtem Maximum (das bei Zimmertemperatur im Infraroten liegt und bei höheren Temperaturen ins sichtbare wandert)

2.3 Stefan-Boltzmann-Gesetz

Gesetz für die gesamte von einem Schwarzen Strahler emittierte Strahlungsleistung:

$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4$$

σ := Stefan-Boltzmann-Konstante

$$= 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

A bezeichnet die abstrahlende Fläche.

Für nicht ideale schwarze Strahler wird ein Emissionskoeffizient ϵ eingeführt. Dieser beträgt bei Zimmertemperatur z.B. 0,02 für Aluminium und 0,95 für Ruß.

2.4 Wien'sches Verschiebungsgesetz

Die Wellenlänge maximaler Intensität variiert mit der Temperatur

$$\lambda_{max} \cdot T = 0,2898 \text{ cmK}$$

Daher kommt der Begriff "Farbtemperatur" einer Lichtquelle

2.5 Rayleigh-Jeans-Gesetz

(Ableitbar für kleine Frequenzen aus dem Planck'schen Strahlungsgesetz)
Energiedichte $u(\nu, T)$ des Strahlungsfeldes

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{4\nu^2}{c^3} k_B T d\nu$$

- mit der Boltzmannkonstante k_B
- gut für kleine Frequenzen
- unbrauchbar für große

2.6 Wien'sches Strahlungsgesetz

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi^2 \nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} d\nu$$

- gut für hohe Frequenzen
- versagt bei niedrigen

2.7 Planck'sches Strahlungsgesetz

Die bisherige Beschreibung war sehr unbefriedigend, da nur für Grenzfälle (großer oder kleiner Frequenz) ausreichende Modelle. Über die Quantisierung der elektromagnetischen Energie in Einheiten von $h\nu$:

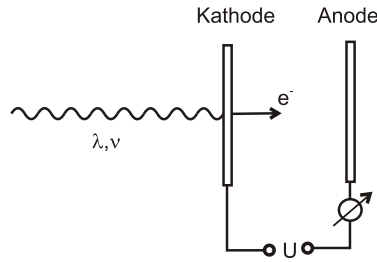
$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Die beiden vorhergehenden Formeln ergeben sich aus Grenzwertbetrachtungen dieser Formel.

²Idealisierung dass keine Strahlung reflektiert wird

3 Photoeffekt und Photonen

- Monochromatische Strahlung einer bestimmten Wellenlänge wird auf eine Kathode gelenkt. Ab einer gewissen Energie der Strahlung ist ein Strom zwischen Anode und Kathode feststellbar.



- Beobachtungen:

1. Bereits bei negativer Spannung U ist ein Photostrom beobachtbar
2. U_{min} ist *nicht* abhängig von der Lichtintensität (\Rightarrow Widerspruch zur klassischen Vorstellung) sondern nur von der Wellenlänge des verwendeten Lichtes sowie des verwendeten Materials der Kathode
3. $I_{Sätt} \propto$ Intensität des Lichts
 \Rightarrow Interpretation durch Lichtquanten (Photonen). Intensität des Lichts im Bereich der Quanten \propto Anzahl der Photonen pro Zeit und Fläche.
4. Deshalb setzt der Photostrom instantan ein.
5. Durch Gegenspannung kann Strom verringert bzw. unterdrückt werden (Haltepunkt des Photostroms U_H).
 (a) \rightarrow es existieren Elektronen mit kinetischer Energie
 (b) es gibt maximale kin. Energie je Elektron ($e \cdot U_H$).
6. Abhängigkeit $U_{pot} = -e \cdot U_{min}$ linear mit ν !

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{m_e v_{max}^2}{2} = h \cdot \nu - W_A \text{ Einsteingleichung}$$

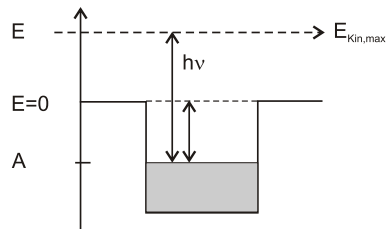
$h =$ universelle Naturkonstante (Planck'sches Wirkungsquantum)

$W_A =$ Austrittsarbeit (Materialkonstante)

$$h = [6,626 \cdot 10^{-34}] Js$$

$$h = [4,137 \cdot 10^{-15}] eVs$$

$h \cdot \nu =$ Energie eines Photons



Metall	$\frac{A}{eV}$	atom. Bind. Energie [eV]
Cs	1,9	3,9
Na	2,3	5,9
W	4,6	8,9

- Anwendung des Photoeffektes: z.B. Messung der Lichtstärke. γ ist photoelektrische Empfindlichkeit, I_{ph} der Photostrom und P_s die Strahlungsleistung, dann ist $\gamma = \frac{I_{ph}}{P_s}$.

3.1 Eigenschaften von Photonen

Masse von Photonen

$$m_\gamma = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{\hbar\omega}{c^2} \text{ Ruhemasse } m_0 = 0$$

Rotverschiebung im Gravitationsfeld

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \text{Energieverlust an Potentieller Energie} \\ \Rightarrow & \text{Rotverschiebung (Verlängerung der Wellenlänge)} \\ & \frac{\delta\nu}{\nu} = G \frac{M}{R} \cdot \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

Gravitationskonstante G . M und R Masse und Radius des Körpers mit Gravitationsfeld

Impuls von Photonen aus $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow p\nu &= \frac{E_\nu}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \\ \vec{p}_\nu &= \frac{h}{\lambda} \cdot \vec{k} = \hbar\vec{k} \end{aligned}$$

Drehimpuls von Photonen Photonen haben Drehimpuls $L = \pm\hbar$, der unabhängig von λ ist.

Helizität: Projektion des Impulses auf den Drehimpuls

$$H := \frac{\vec{p} \cdot \vec{L}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{L}|} = \pm 1$$

$\Rightarrow H = +1$ "rechtshändig" (links zirkular polarisiert)

$\Rightarrow H = -1$ "linkshändig" (rechts zirkular polarisiert)

3.2 Comptoneffekt

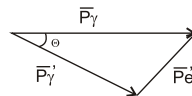
- relativistische Energie- Impulsbeziehung

$$E^2 = p^2 \cdot c^2 + (m_0 \cdot c^2)^2$$

- Photonen ($v = c$ im Vakuum) haben $m_0 = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_\gamma &= p \cdot c \\ \text{bzw. } p_\gamma &= \frac{E_\gamma}{c} \end{aligned}$$

- Comptoneffekt:
Streuung eines Photons (Energie E_γ , Impuls \vec{p}_γ) am freien Elektorn. Für $E_\gamma \geq [10^2]keV$ sind gebundene Elektronen näherungsweise als freie Teilchen zu betrachten.



- Streuung am ruhenden Elektron (Ruhemasse m_0 , $\vec{p}_e = 0$)

$$\begin{aligned} \theta &:= \text{Streuwinkel} \in [0, [180]^\circ] \\ \Rightarrow \vec{p}_e &= \vec{p}_\gamma - \vec{p}'_\gamma \text{ und Energieerhaltung} \\ E_\gamma + m_0 \cdot c^2 &= E'_\gamma + \sqrt{p_e'^2 \cdot c^2 + (m_0 \cdot c^2)^2} \end{aligned}$$

Einsetzen von \vec{p}'_e ergibt

$$E'_\gamma = E_\gamma \cdot \frac{m_0 \cdot c^2}{m_0 \cdot c^2 + E_\gamma(1 - \cos \theta)}$$

Änderung der Wellenlänge durch Energieübertrag ergibt sich zu:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c}(1 - \cos \theta)$$
$$\frac{h}{m_0 \cdot c} = [2,42631 \cdot 10^{-12}]m \text{ Compton- Wellenlänge des Elektrons}$$

- Maximaler Impulsübertrag über Streuung mit $\theta = [180]^\circ$ (Rückwärtsstreuung)

3.3 Bremsstrahlung, Röntgenstrahlung

- Elektronen hoher aber definierter Energie $E_{kin} = e \cdot U$ werden auf Materie (z.B. Metall) geschossen und dabei abgebremst.
- Dabei werden ein oder mehrere Photonen abgestrahlt

$$\hbar\omega = E_{\gamma,kin} - E'_{\gamma,kin}$$

- maximale Frequenz (falls nur ein Photon entsteht)

$$\hbar\omega_{max} = E_{kin} = eU$$

- Bremsstrahlung \Rightarrow kontinuierliches Spektrum
- zusätzlich entsteht charakteristische Röntgenstrahlung. Tief gebundene Elektronen werden ins Kontinuum gehoben (durch Stoß), das in die Atomhülle gerissen wurde wird durch ein äußeres Hüllenelektron gefüllt. Energiedifferenz der Bindungsniveaus wird als γ -Quant emittiert.
- Da die Energiedifferenzen zwischen den Bindungsniveaus Materialspezifisch sind, heißt diese Strahlung charakteristische Röntgenstrahlung.

3.4 Paarerzeugung

- Neben Photo + Compton Effekt dritter möglicher Prozess bei Wechselwirkung von Photonen mit Teilchen
- Energien in der Größenordnung von MeV
- Positron = Antiteilchen des Elektrons

$$m_{e^+} = m_{e^-} = [0,511] \frac{MeV}{c^2}$$
$$q = +e \text{ (} e = \text{positive Einheitsladung)}$$

- Bei der Paarerzeugung entsteht aus einem Gammaquant ein Elektron sowie sein Antiteilchen, ein Positron

$$\gamma \longrightarrow e^+ e^-$$

- Die Mindestenergie muss zwei mal der Ruheenergie des Elektrons entsprechen, da auch das Positron diese Ruhemasse besitzt.

$$E_{min} = 2 \cdot m_e \cdot c^2$$
$$\approx [1]MeV$$

- Energiebilanz:

$$h \cdot \nu = 2 \cdot m_e \cdot c^2 + \underbrace{T_{pos} + T_{el}}_{\text{kinet. Energien}}$$

- Paarerzeugung der dominierende Prozess bei hohen Energien, wie durch folgende Grafik noch einmal verdeutlicht wird

