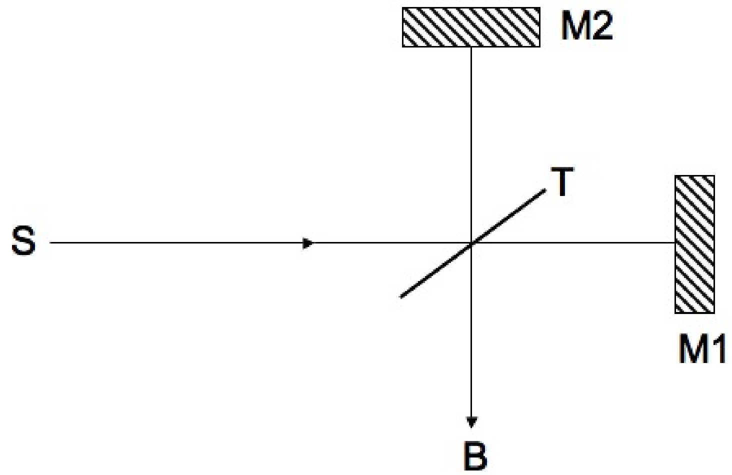
Übungsaufgaben zum Experimentalphysik III Ferienkurs

Max v. Vopelius, Matthias Brasse
26.02.2009

Aufgabe 1:
Gegeben sei ein Michelson-Interferometer.



a) Die Quelle S emittiere zunächst monochromatische Strahlung der Wellenlänge λ. Im Punkt B beobachtet man das Auftreten von 10 Interferenzmaxima, wenn der Spiegel M1 um die Strecke $d = 2.25\mu m$ in Strahlrichtung verschoben wird. Bestimmen sie die Wellenlänge λ.

Lösung: Um einigen Fragen gleich zuvorzukommen: Es werden nicht 10 Maxima gleichzeitig betrachtet, nachdem man den Spiegel verschoben hat. Es werden natürlich während des Verschiebens des Spiegels Interferenzmaxima auftreten. Wir betrachten hier einen divergenzfreien Strahl, so dass nur ein Punkt auf dem Schirm überhaupt beleuchtet wird, in dem eben abwechselnd Minima und Maxima erscheinen, während man die Weglängendifferenz der Lichtstrahlen ändert. Mehrere Maxima nebeneinander können in realen Experimenten (Praktikumsversuch) auftreten, da die Lichtquelle eben nicht divergenzfrei ist, sondern immer einen gewissen Öffnungswinkel produziert, welcher zu einer räumlichen Ausdehnung des Interferenzbildes führt. Nun aber zur Aufgabe:
Die zusätzliche Weglänge, die der Strahl nach der Verschiebung durchlaufen hat, ist:

$$\Delta s = 2d = 10\lambda$$

Damit ergibt sich eine Wellenlänge von $450nm$.

b) Zwischen Strahlteiler T und Spiegel M1 wird nun eine evakuierte Zelle der länge $L = 10cm$ gestellt. Während des Auffüllens der Zelle mit CO_2- Gas bis zum Atmosphärendruck wird das Auftreten von 200 Interferenzmaxima beobachtet. Bestimmen

Sie den Brechungsindex n von CO_2 bei Atmosphärendruck.

Lösung: Nun wird der Spiegel nicht mehr verschoben. Anfangs ist eine evakuierte Zelle im Strahlweg, die einen optischen Weg von $2Ln_{vac} = 2L$ darstellt. Füllt man die Zelle mit CO2, so ändert sich der Brechungsindex in der Zelle und somit der optische Weg. Nach Aufgabenstellung werden 200 Maxima durchlaufen, weswegen der zusätzliche Wegunterschied wie folgt ist:

$$\Delta s = 2L(n_{CO_2} - 1) = 200\lambda$$

Daraus folgt $n_{CO_2} = 1.00045$

c) Mit dem Michelson-Interferometer konnen zwei eng benachbarte Wellenlangen aufgelost werden. In Abhangigkeit von der Verschiebung d des Spiegels M1 beobachtet man maximale Intensitat, wenn die einzelnen Interferenzbilder fur die Strahlung der beiden Wellenlangen zusammenfallen. Die Quelle S emittiere nun zwei Strahlungen der Wellenlangen λ und λ' mit $\lambda \approx \lambda' \approx 450nm$. Die Strecke, die der Spiegel M1 zwischen zwei benachbarten maximaler Intensitat verschoben werden mus, ist $d = 90\mu m$. Bestimmen Sie $\Delta\lambda = |\lambda - \lambda'|$.

Lösung: Verschieben wir nun wieder den Spiegel. Anfangs schieben wir den Spiegel so in Position, dass wir eine konstruktive Interferenz erreichen (sowohl λ als auch λ' interferieren konstruktiv). Nun verschieben wir den Spiegel um d und erhalten erst wieder ein Maximum, wenn sowohl die Wellenlänge λ, als auch λ' wieder ein Maximum am Schirm haben. Mit $\lambda > \lambda'$ gilt:

$$\begin{aligned} \Delta s = 2d = N\lambda = (N+1)\lambda' \\ \rightarrow N = \frac{2d}{\lambda} = 400 \rightarrow \Delta\lambda &= \lambda - \lambda' = \frac{2d}{N} - \frac{2d}{N+1} = 1.122nm \end{aligned}$$

d) Wieviele Spalte mus ein Gitterspektrograph mindestens besitzen, wenn dieselben Wellenlangen λ und λ' in erster Ordnung aufgelöst werden sollen.

Lösung: Die Auflösung eines Gitters mit M Strichen ist gegeben durch:

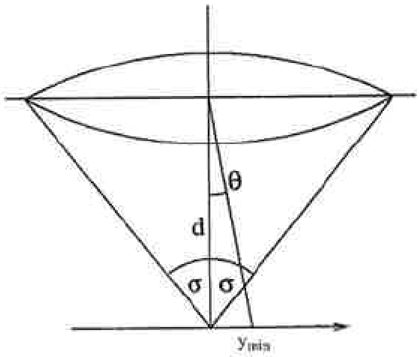
$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kM$$

Für die 1. Ordnung folgt $M = 400$.

Aufgabe 2: Auflösungsvermögen von Mikroskopen

Das Auflösungsvermögen y_{min} eines Lichtmikroskops soll mit dem eines Elektronenmikroskops verglichen werden. Es wird zunächst angenommen, dass beide einen Öffnungswinkel $2\sigma = 120°$ haben. Das Lichtmikroskop wird mit Licht eiens He-Ne-Lasers ($\lambda = 632.8nm$) betrieben, die Elektronen haben eine kinetische Energie von $100keV$.

a) Wie groß ist das Auflösungsvermögen $y_{min,L}$ des Lichtmikroskops, wenn keine Immersionsflüssigkeit verwendet wird?
Lösung:



y_{min} ist der kleinste Abstand zweier Punkte, die nach dem Rayleigh Kriterium noch aufgelöst werden können. Das Rayleigh-Kriterium lautet:

$$\sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

Es kann die Kleinwinkelnäherung verwendet werden. Aus der Zeichnung entnimmt man: Grafik

$$\theta = \frac{y_{min}}{d} = \frac{y_{min}2\tan\sigma}{D} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$
$$\rightarrow y_{min} = 1.22\frac{\lambda}{2\tan\sigma} = 222.9nm$$

b) Wie groß sind Impuls (relativistisch!) und Wellenlänge λ_e der Elektronen? Um wieviel mal besser löst das Elektronenmikroskop auf, wenn die Öffnungswinkel dieselben sind?
Lösung: Der Impuls der Elektronen ist:

$$p = \sqrt{(m_0c^2 + E_{kin})^2 - m0^2c^4} = 335keV/c$$

Daraus folgt $\lambda = h/p = 3.7 \cdot 10^{-12}m$. Das Auflösungsvermögen ist dann $y_{min} = 1.3 \cdot 10^{-12}m$, also ca. 171000 mal besser als beim optischen Mikroskop.

c) Wegen Abbildungsfehlern der Elekronenoptik lassen sich jedoch nur wesentlich kleinere Öffnungswinkel realisieren. Wie groß ist das Auflösungsvermögen wenn $2\sigma = 1°$ beträgt?
Lösung

$$y_{min} = 0.26nm$$

Aufgabe 3: Phasenverschiebungsplättchen
Gegeben ist ein Phasenverschiebungsplättchen mit optischer Achse parallel zur Grenzfläche. Das Licht fällt senkrecht auf das Plättchen. Beim Durchgang durch die Platte werden ordentlicher und außerordentlicher Strahl gegeneinander phasenverschoben. (Brechungsindizes n_o bzw. n_{ao})

a) Wie groß ist der Phasenunterschied als Funktion der Dicke d?

Lösung:
Der ordentliche Strahl wird nicht abgelenkt, da das Licht senkrecht zur Grenzfläche eingestrahlt wird. Der ao Strahl ebenfalls nicht, da die optische Achse senkrecht zur Einfallsrichtung steht.
Differenz der optischen Weglängen:

$$\Delta s = (n_o - n_{ao})d$$

Phasenverschiebung $\Delta\phi$:

$$\Delta\phi = k\Delta s = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_{ao})d$$

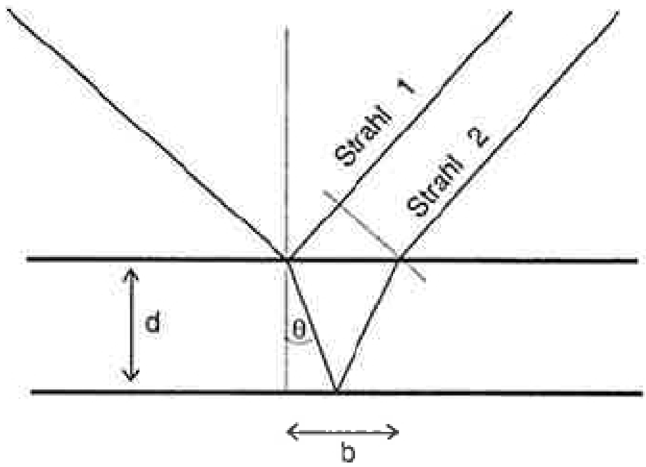
---

b) Welche Dicke muss ein Plättchen aus Kalkspat mit $n_o = 1.65$ u. $n_{ao} = 1.48$ haben, um für Licht der Wellenlänge $\lambda = 587.6nm$ einen Phasenunterschied von π zwischen ordentlichem u. außerordentlichem Strahl zu bewirken? Wieso nennt man ein derartiges Plättchen $\lambda/2$-Plättchen?

Lösung:

$$\Delta\phi = k\Delta s = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_{ao})d$$
$$\rightarrow d = \frac{\lambda\Delta\phi}{2\pi(n_o - n - ao)}$$
$$d(\Delta\phi = \pi) = 1.73\mu m$$

Aufgabe 4: Seifenblase



a) Erklären Sie, warum Seifenblasen in bunten Farben schillern

---

Lösung:
Interferenz an dünnen Schichten, konstruktive Interferenz abhängig von Dicke der Seifenblase, Dickenfluktuationen führen zu schillernden Farben

---

b) Weißes Licht (ebene Wellenfront) fällt unter einem Winkel von 45° auf eine Seifenblase ($n = 1.33$). Im reflektierten Licht beobachtet man Farben bis zu einer max. Wellenlänge von $\lambda = 0.6\mu m$. Bestimmen sie die Dicke der Seifenblase. (Bild)

Lösung:
Betrachte die Weglängendifferenz $\Delta s = s_2 - s_1$ zwischen Strahl 1 und 2:

$$\begin{aligned} s_1 &= b \sin 45^\circ + \lambda/2 \\ &= 2d \tan\theta \sin 45^\circ + \lambda/2 = 2d \tan\theta \cdot n \sin\theta + \lambda/2 \\ s_2 &= \frac{2d}{cos\theta} \cot n \\ \rightarrow \Delta s &= \frac{2nd}{\cos\theta}(1 - \sin^2\theta) - \lambda/2 = 2nd\cos\theta - \lambda/2 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2(45^\circ)}{n^2}} = 0.84696$$

Bedingung für konstruktive Interferenz $\Delta s = k\lambda$:

$$2nd\cos\theta = (2k+1)\lambda/2$$

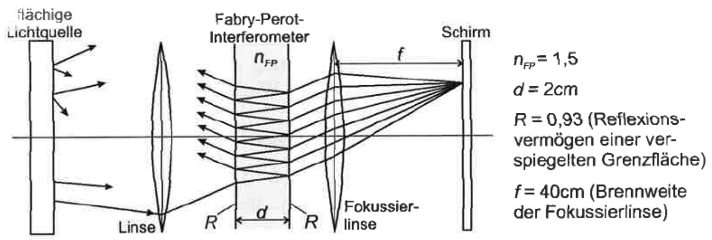
Interferenz tritt bis maximal $\lambda_{max} = 0.6\mu m$ auf. Dies entspricht dem Wegunterschied Δs von einer Wellenlänge, also $k_min = 0$.

$$2nd\cos\theta = \frac{\lambda}{2}$$

Daraus folgt: $d = 0.133\mu m$.

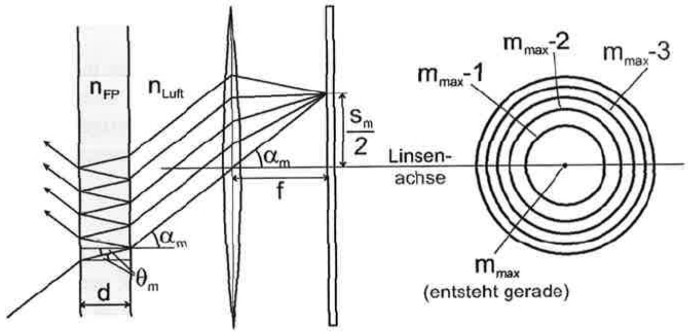
Aufgabe 5: Fabry-Perot Interferometer

Gegeben sei ein Fabry-Perpt Interferometer. Eine flächige Lichtquelle liefert Licht der Wellenlänge $\lambda \approx 555nm$. In der Grafik ist einer von vielen möglichen Strahlengängen eingezeichnet.



a) Welchen maximalen Durchmesser kann der innerste Interferenzring auf dem Beobachtungsschirm annehmen? Welchen Durchmesser haben dann die beiden Nachbarringe?

Lösung:
Die Interferenz der vielfachreflektierten Lichtwellen führt in Transmission zu scharfen Maxima. Da die flächige Lichtquelle alle möglichen Beleuchtungswinkel anbietet,



entstehen auf dem Schirm helle, konzentrische Ringe. Der Ring mit der Ordnung m liegt dann vor, wenn gilt:

$$2n_{FP}d\cos\theta_m = m\lambda, \qquad m = 1, 2, ..m_{max}$$

Da $\cos\theta_m \leq 1$ ist, gibt es unter den gegebenen Randbedingungen (n_{FP}, d, λ) immer eine maximale Beugungsordung m_{max}. Der zu m_{max} gehörende Ring hat den kleinsten möglichen Winkel θ_{max}, dieser Ring ist also der innerste Ring. Wird nun z.B. die Wellenlänge λ kontinuierlich erniedrigt, so entstehen im Zentrum des Schirmbildes sukzessiv neue, höhere Ordnungen, die Winkel der bereits bestehenden Ordnungen werden größer und sie rutschen nach außen. Immer dann wenn im Zentrum ein neuer Ring entsteht (Ordnung m_{max}), hat der vorherige Ring (Ordnung $m_{max} - 1$) seinen maximalen Durchmesser als innerster Ring erreicht. Die Ordnung m_{max} entsteht genau dann, wenn der zugehörige Winkel $\theta_{m_{max}} = 0$.

$$2n_{FP}d = m_{max}\lambda$$
$$\rightarrow m_{max} = \frac{2n_{FP}d}{\lambda} = 1.08 \cdot 10^5$$

Für den innersten Ring mit maximalen Radius (Ordnung $m_{max} - 1$) gilt:

$$2n_{FP}d\cos\theta_{m_{max}-1} = (m_{max} - 1)\lambda$$

Daraus folgt:

$$\cos\theta_{m_{max}-1} = \frac{m_{max} - 1}{m_{max}}$$
$$\rightarrow \theta_{m_{max}-1} = 0.247°$$

Zusammenhang zu den Ringdurchmessern auf dem Schirm (Snellius):

$$n_{FP}\sin\theta_m = \sin\alpha_m$$

Für kleine Winkel α_m gilt für den Durchmesser s_m:

$$\frac{s_m}{2f} = \tan\alpha_m \approx \sin\alpha_m$$

Man erhält:

$$s_m = 2fn_{FP}\sin\theta_m$$

Somit ergibt sich für den maximalen Durchmesser des innersten Rings:

$$s_{m_{max}-1} = 5,2nm$$

b) Wie groß ist die Finesse des Interferometers?

Lösung:

$$\widetilde{F} = \frac{\pi \cdot \sqrt{R}}{1-R} \approx 43.3$$

c) Berechnen Sie das Auflösungsvermögen und den freien Spektralbereich (Wellenlängenbereich in dem sich Maxima unterschiedliche Ordnungen noch nicht überlagern.

Lösung:
Für das Auflösungsvermögen gilt:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\widetilde{F} 2dn_{FP}\cos\theta_m} = \frac{1}{\widetilde{F}m}$$

Hohes Auflösungsvermögen ergibt sich bei hoher Interferenzordnung $m_{max} = 1.08 \cdot 10^5$:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2.1 \cdot 10^{-7}$$

Für den freien Spektralbereich gilt:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2dn_{FP}\cos\theta_m} = \frac{1}{m_{max}} = 9.3 \cdot 10^{-6}$$

Aufgabe 6: Oberflächenvergütung

Zur Unterdrückung störender Reflexionen an Glasoberflächen können dielektrische Schichten aufgebracht werden.

a) Auf eine Glasoberfläche mit $n_g = 1.60$ wird eine Schicht aus Magnesiumfluorid mit $n_{MgF_2} = 1.38$ aufgebracht. Wie dick muss die Schicht sein, damit für Licht der Wellenlänge $\lambda = 555nm$ die Reflexion vermindert wird?

Lösung:
Bedingung für destruktive Interferenz:

$$\Delta s = 2dn_{MgF_2} = \frac{\lambda}{2}$$

Somit erhält man:

$$d = \frac{\lambda}{4n_{MgF_2}} \approx 101nm$$

b) Warum verwendet man für die Schicht kein Material mit Brechungsindex $n > n_g$?

Lösung:
Bei einer Schicht mit $n > n_g$ ändern sich die Verhältnisse bzgl. des Phasensprunges. Prinzipiell lässt sich auch hier destruktive Interferenz erzeugen durch eine geeignete Schichtdicke. Allerdings sind die beiden Reflexionsvermögen R_1 u. R_2 immer sehr unterschiedlich, da der Brechungsindexunterschied an der ersten Oberfläche viel größer als an der zweiten ist. Häufig ist die destruktive Interferenz unvollkommen.

Aufgabe 7: Radioastronomie
Der Durchmesser der Sonne beträgt $1.39 \cdot 10^6$km und ihr Abstand zur Erde etwa $l = 150 \cdot 10^6$km. Sonnenflecken haben Durchmesser von bis zu $d = 5 \cdot 10^4$km. Zur Untersuchung von Sonnenflecken nutzt man Wellenlängen von $\lambda = 2m$.

a) Welchen Durchmesser D müsste der Reflektor eines Radioteleskops haben, mit dem man Sonnenflecken auflösen kann?

Lösung:
Auflösungsvermögen von Fernrohren, Rayleigh Kriterium.

$$\begin{aligned}\sin\Phi \approx \Phi &= 1.22\frac{\lambda}{D}\\ \Phi &= \frac{d}{l} = 3.33 \cdot 10^{-4}\\ \rightarrow D &= 1.22\frac{\lambda}{\Phi} = 7320m\end{aligned}$$

---

b) Berechnen Sie zum Vergleich die Winkelauflösung des Spiegelteleskops auf dem Mt. Palomar für $\lambda = 550nm$. Es hat einen Spiegeldurchmesser von $D = 5m$.

Lösung:

$$\Delta\phi_{min} = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.34 \cdot 10^{-7}rad$$

Aufgabe 8: Doppelbrechung
Auf ein planparalleles Kalkspatplättchen der Dicke d, dessen optische Achse parallel zur Oberfläche ist, fällt senkrecht polarisiertes Licht der Wellenlänge λ, wobei die Polarisationsrichtung einen Winkel von 45° mit der optischen Achse bildet. Der Brechungsindex für den ord. Strahl ist $n_o = 1.6584$, der Brechungsindex für den außerord. Strahl ist $n_{ao} = 1.4864$. Hinter der Platte befindet sich ein Polarisationsfilter, dessen Durchlassrichtung mit der optischen Achse einen Winkel Θ bildet. Wie groß ist die Intensität des Lichtes nach dem Polarisationsfilter, wenn die einfallende Intensität I_0 ist? Was ergibt sich für $\lambda = 500nm$ und $d = 6.541\mu m$? Wie ist in diesem Fall das die Platte verlassende Licht polarisiert?
Lösung:
Zerlegen wir den elektrischen Feldvektor in seine Komponenten parallel zur optischen Achse des Mediums (ao) und senkrecht dazu (o), so erhalten wir:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)e^{i\omega t}$$

wobei $\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$ die Einheitsvektoren in x-und y-Richtung sind und die optische Achse parallel zur y-Richtung steht. Die Phasenverschiebung für beide Komponenten beim Durchgang durchs Plättchen ist:

$$\begin{aligned}\phi_{ao} &= \frac{2\pi}{\lambda}dn_{ao}\\ \phi_o &= \frac{2\pi}{\lambda}dn_o\\ \rightarrow\Delta\phi &= \phi_o - \phi_{ao} = \frac{2\pi}{\lambda}d(n_o - n_{ao})\end{aligned}$$

Nach dem Durchgang ergibt sich der Feldvektor zu:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} (\mathbf{e}_x e^{i\phi_o} + \mathbf{e}_y e^{i\phi_{ao}})$$

Nach Durchgang durch den Polarisator erhält man:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_{pol} \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} (e^{i\phi_o} \sin\Theta + e^{i\phi_{ao}} \cos\Theta)$$

Die Intensität ist wie üblich das Betragsquadrat:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{E_0^2}{2} (\sin\Theta e^{i\phi_o} + \cos\Theta e^{i\phi_{ao}})(\sin\Theta e^{-i\phi_o} + \cos\Theta e^{-i\phi_{ao}}) \\
&= \frac{E_0^2}{2} (\sin^2\Theta + \cos^2\Theta + \sin\Theta\cos\Theta(e^{i(\phi_o-\phi_{ao})} + e^{-i(\phi_o-\phi_{ao})})) \\
&= \frac{E_0^2}{2} (1 + 2\sin\Theta\cos\Theta\cos\Delta\phi) \\
&= \frac{I_0}{2} (1 + 2\sin 2\Theta\cos\Delta\phi)
\end{aligned}$$

Man erhält $\Delta\phi = 4.5\pi$ und somit

$$I = \frac{I_0}{2}$$

Die Intensität ist unabhängig von Θ! Das Licht ist zirkular polarisiert nach Verlassen des Kalkspatplättchens. Wir haben es also mit einem $\lambda/4$-Plättchen zu tun.