

Ferienkurs Experimentalphysik III - Optik

Max v. Vopelius, Matthias Brasse

26.02.09

Inhaltsverzeichnis

1	Interferenz	1
1.1	Interferenz durch Mehrfachreflexion	1
1.1.1	Interferenz dünner Schichten	1
1.1.2	Vergütung von Oberflächen	4
1.2	Interferometrie	4
1.2.1	Fabry-Perot-Interferometer	5
1.2.2	Michelson-Interferometer	6
2	Auflösungsvermögen einiger optischer Instrumente	6
3	Doppelbrechung	7

1 Interferenz

Bisher haben wir nur Spalt- und Gitterinterferometer diskutiert. Wir haben gesehen, dass man beim Gitter eine wesentlich höhere Auflösung in Bezug auf die Wellenlängenmessung bekommt als bei Spaltexperimenten. Der Grund hierfür ist, dass wir es mit Mehrstrahlinterferenzen zu tun haben. Es gibt neben dem Gitter allerdings auch noch andere Möglichkeiten, Mehrstrahlinterferenz zu erzeugen. Dies kann z. B. geschehen durch Mehrfachreflexionen an dünnen Schichten.

1.1 Interferenz durch Mehrfachreflexion

1.1.1 Interferenz dünner Schichten

Zunächst betrachten die Reflexion von Licht an Vorder- und Rückseite von dünnen Schichten. Dieses Phänomen ist beispielsweise verantwortlich für die schillernde Farbe von Seifenblasen oder für die Regenbogenfarben eines Ölflecks auf Wasser. Gegeben haben wir eine dünne ebene Platte der Dicke d und dem Brechungsindex n_f . Paralleles Licht fällt unter einem Winkel θ auf die Platte und wird zunächst an der Oberfläche reflektiert. Ein gewisser Teil des Lichts wird transmittiert und an Rückseite reflektiert. Die Platte hat die Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten r bzw. t . Zu Anfang gehen wir davon aus, dass nur eine Reflexion stattfindet. Um Mehrfachreflexion kümmern wir uns später.

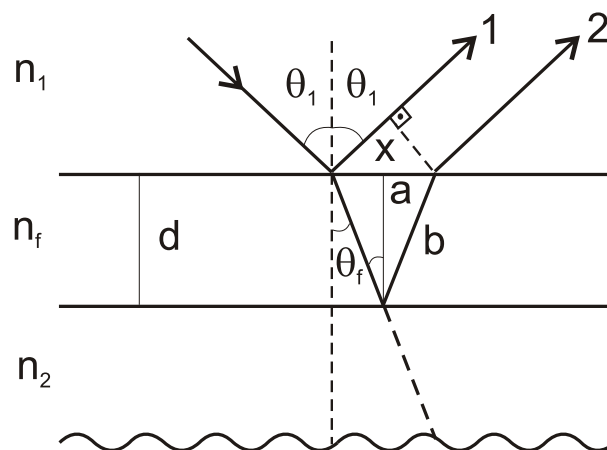


Abbildung 1: Reflexion an planparalleler Platte

Betrachten wir zunächst eventuelle Phasensprünge bei der Reflexion. Es findet bei der Reflexion an optisch dichteren Medium immer ein Phasensprung von π statt. Das heißt, für $n_f > n_1$ und analog für $n_2 > n_f$ hat man einen Phasensprung um π . Entscheidend ist der Unterschied der Phasensprünge $\Delta\phi$ die Strahl 1 und Strahl 2 erleiden. Insgesamt gilt

$$\Delta\phi = \begin{cases} \pi & \text{für } n_f < n_1 \text{ und } n_f < n_2 \\ \pi & \text{für } n_f > n_1 \text{ und } n_f > n_2 \\ 0 & \text{für } n_1 < n_f < n_2 \\ 0 & \text{für } n_2 < n_f < n_1 \end{cases}$$

Jetzt kommen wir zum Gangunterschied Δs bzw. zur Phasendifferenz der beiden Strahlen. Aus der Zeichnung entnimmt man, dass die optische Weglängendifferenz unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Brechungsindizes gegeben ist durch:

$$\Delta s = 2n_f b - n_1 x$$

Unter Zuhilfenahme einiger geometrischen Beziehungen ergibt sich:

$$\begin{aligned}x &= a \cdot \sin \theta_1 \\a &= 2 \cdot d \cdot \tan \theta_f \\b &= \frac{d}{\cos \theta_f}\end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich:

$$\begin{aligned}\Delta s &= 2n_f \cdot \frac{d}{\cos \theta_f} - 2n_1 d \cdot \frac{\sin \theta_f}{\cos \theta_f} \cdot \sin \theta_1 \\&= \frac{2 \cdot d}{\cos \theta_f} \left(n_f - \underbrace{n_1 \cdot \sin \theta_1}_{=n_f \cdot \sin \theta_f} \cdot \sin \theta_f \right) \\&= \frac{2 \cdot d}{\cos \theta_f} \cdot n_f \cdot (1 - \sin^2 \theta_f) \\&= 2 \cdot d \cdot n_f \cdot \cos \theta_f\end{aligned}$$

Konstruktive Interferenz ist dann gegeben, wenn der Gangunterschied Δs gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge plus dem Wellenlängenunterschied aufgrund des Phasensprungs entspricht. Das heißt

$$\Delta s = 2 \cdot d \cdot n_f \cdot \cos \theta_f = \left(m + \frac{\Delta \phi}{2\pi} \right) \cdot \lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Destruktive Interferenz erhält man bei

$$\Delta s = 2 \cdot d \cdot n_f \cdot \cos \theta_f = \left(\frac{2m+1}{2} + \frac{\Delta \phi}{2\pi} \right) \cdot \lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Nun lassen wir auch Mehrfachreflexionen zu, wie dies zum Beispiel beim Fabry-Perot Interferometer der Fall ist.

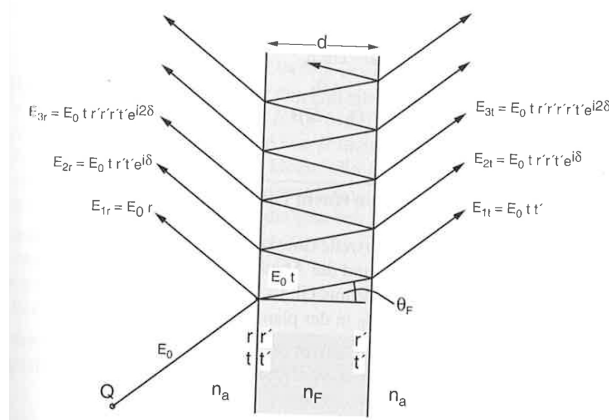


Abbildung 2: Mehrfachreflexionen an dünner Platte [3]

Dabei gehen wir von einer dünnen Platte mit Brechungsindex n_f aus umgeben von einem Medium mit Brechungsindex n_a . In diesem Fall verwenden wir die Reflexionskoeffizienten r und t für die

äußere Reflexion bzw. Transmission und r' , t' für die innere Reflexion bzw. Transmission. Dabei gilt $r' = -r$ und $t \cdot t' = 1 - r^2$. Der Phasensprung bei Reflexion am optisch dichteren Medium wird dabei durch die unterschiedlichen Vorzeichen von r bzw. r' berücksichtigt. Die gesamte reflektierte Intensität erhält man durch Summation über alle Teilbündel.

$$\begin{aligned} E_r &= E_{1r} + E_{2r} + \dots \\ &= E_0 r + E_0 t r' t' e^{i\delta} + E_0 t r' r' t' e^{2i\delta} + \dots \\ &= E_0 \left[r + r' t t' e^{i\delta} \left(1 + r'^2 e^\delta + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

Dabei ist $\delta = \Delta s \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda}$ der geometrische Phasenunterschied zwischen den Teilwellen. Der Term in runden Klammern lässt sich wieder als geometrische Reihe schreiben.

$$E_r = E_0 \left(r + \frac{r' t t' e^{i\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right)$$

Mit den Bedingungen für Reflexions- u. Transmissionkoeffizienten ergibt sich:

$$E_r = E_0 \frac{r(1 - e^{i\delta})}{1 - r^2 e^{i\delta}}$$

Daraus folgt die reflektierte Intensität und mit $I_0 = I_r + I_t$ auch die transmittierte zu

$$I_r = \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} = I_0 \frac{F \sin^2 \delta/2}{1 + F \sin^2 (\delta/2)} \quad (3)$$

$$I_t = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2 (\delta/2)} \quad (4)$$

$$(5)$$

mit $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ und der Beziehung $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \delta/2$. In Fig. 3 ist die Transmissionsintensität in Abhängigkeit der Phasenverschiebung δ dargestellt für verschiedene Reflektivitätsgrade der Oberfläche.

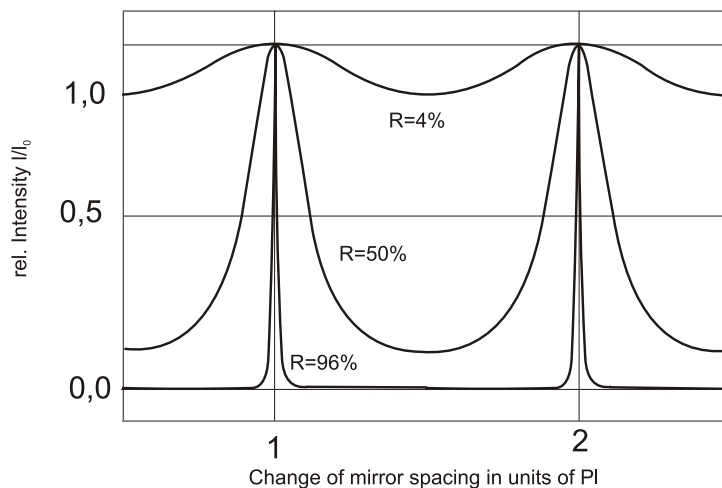


Abbildung 3: Transmissionskurve eines dünnen Plättchens

Die Transmissionsmaxima werden umso schärfer, je größer die Reflektivität der Oberfläche ist. Es gibt Transmissionsmaxima an denen $T = 1$, so dass die Reflexion $R = 0$ ist. Diese sind gegeben durch $\sin \delta/2 = 0$.

$$\boxed{2n_f d \cos \theta_f = m\lambda \quad m = 1, 2, \dots} \quad (6)$$

Reflektionsmaxima treten an den Stellen auf, an denen die Transmission minimal wird ($\sin \delta/2 = 1$). Allerdings verschwindet die Transmission nie zu 100%.

Diese Charakteristika bei der Mehrstrahlinterferenz werden beim Fabry-Perot Interferometer ausgenutzt, dass wir weiter unten behandeln.

1.1.2 Vergütung von Oberflächen

Mehrfachreflexionen kann man sich zunutze machen bei der Vergütung von Oberflächen. Im folgenden wird kurz auf die Reflexminderung und Reflexerhöhung mithilfe dünner Filme eingegangen.

Reflexminderung Die Reflexion kann man vermindern, indem man beispielsweise destruktive Interferenz erzeugt. Hat man eine Glasplatte mit dem Brechungsindex n_2 und man beschichtet diesen mit einem Film $n_f < n_2$ der Dicke d . Bei senkrechtem Lichteinfall aus Luft $n_1 = 1 < n_f < n_2$ erhält man nach Gl. (2) bei

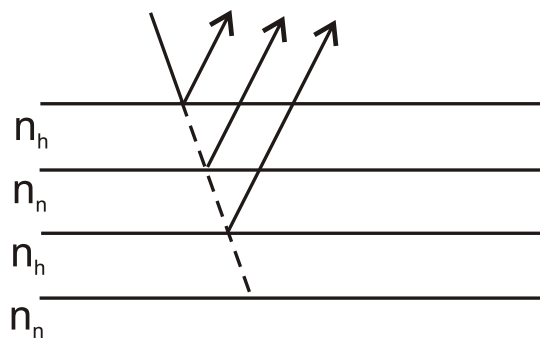
$$2n_f d = \frac{\lambda}{2}$$

So kann man durch den Einsatz von dünnen dielektrischen Filmen die Reflexion an Oberflächen unterdrücken bis zu $R \leq 0.1\%$.

Hochreflektierende Spiegel

- Bestehend aus Doppelschichten mit hoch und niederbrechendem Material (n_h u- n_n), so dass gilt:

$$n_h \cdot d_h = n_n \cdot d_n = \frac{\lambda}{4}$$



- konstruktive Interferenz, da sich Phasensprung und geometrischer Gangunterschied in jeder Doppelschicht zu $\Delta s = \lambda$ addieren
- Hochreflexionsspiegel haben $R \geq 99\%$

1.2 Interferometrie

In diesem Kapitel werden Beispiele diskutiert, die Anwendungen der Beugungs- und Interferenzphänomen verkörpern. Das Gitterspektrometer haben wir schon kennengelernt. Im Folgenden gehen wir kurz auf zwei wichtige Interferometer ein, das Fabry-Perot Interferometer und das Michelson Interferometer.

1.2.1 Fabry-Perot-Interferometer

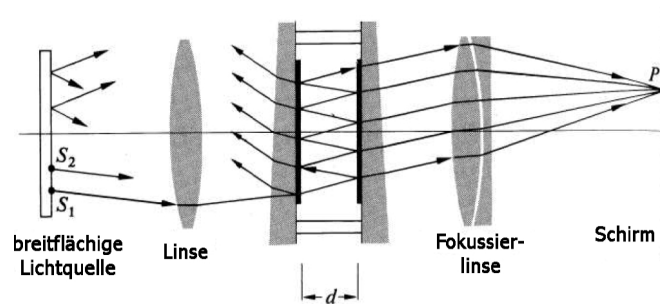


Abbildung 4: schematischer Aufbau des Fabry-Perot Interferometers

Eine bedeutende Anwendung von Mehrstrahlinterferenz ist das Fabry-Perot Interferometer (Fig 4). Das relevante Element ist die planparallele Platte, die von zwei hochreflektierenden Spiegeln begrenzt wird. Hier findet die Mehrfachreflexion statt, die wir im vorigen Kapitel besprochen haben.

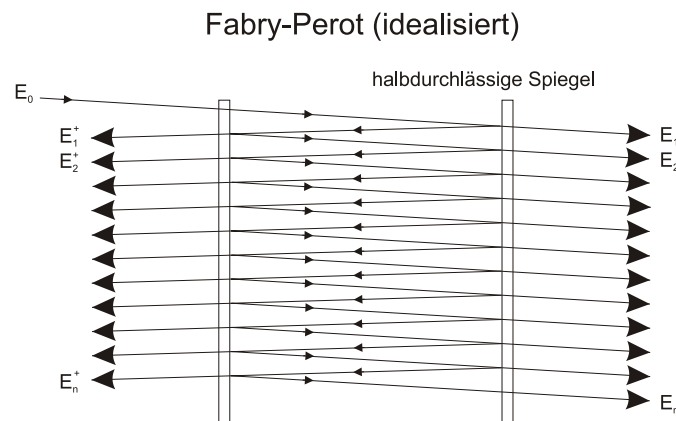


Abbildung 5: Mehrfachreflexion an den hochreflektierenden Spiegeln beim Fabry-Perot Interferometer

Beleuchtet man das Interferometer mit einer ausgedehnten monochromatischen Lichtquelle, so entstehen scharfe, helle Ringe auf dem Schirm. Die Winkel unter dem man die Ringe sieht wurden im vorigen Kapitel hergeleitet und sind gegeben durch

$$2n_f d \cos \theta_f = m\lambda \quad m = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Anmerkungen:

- Das Medium zwischen den Spiegeln ist normalerweise Vakuum, so dass $n_f = 1$
- Verwendung hochreflektierender Spiegel \rightarrow scharfe Transmissionsmaxima, gute Auflösung und niedriger freier Spektralbereich
- F-P Interferometer ist ein wichtiges Instrument zur Wellenlängenmessung. Der freie Spektralbereich des Interferometers, also der Bereich innerhalb dessen man nicht mehr zwischen Wellenlängen $\Delta\lambda = \lambda - \lambda'$ unterscheiden kann, ist normalerweise sehr klein. Er ist gegeben durch

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2nd \cos \theta} = \frac{1}{m}$$

Bei typischen einer Konfiguration von $d = 1\text{cm}$, $n = 1$, $\lambda = 500\text{nm}$ und senkrechten Einfall erhält man als Beugungsordnung 40000. Daraus folgt, das Wellenlängen, die sich

um mehr als $0.002nm$ unterscheiden, als unterschiedliche Wellenlängen aufgelöst werden können. Diese hohe Auflösung ist das Charakteristikum des Fabry-Perot Interferometers.

1.2.2 Michelson-Interferometer

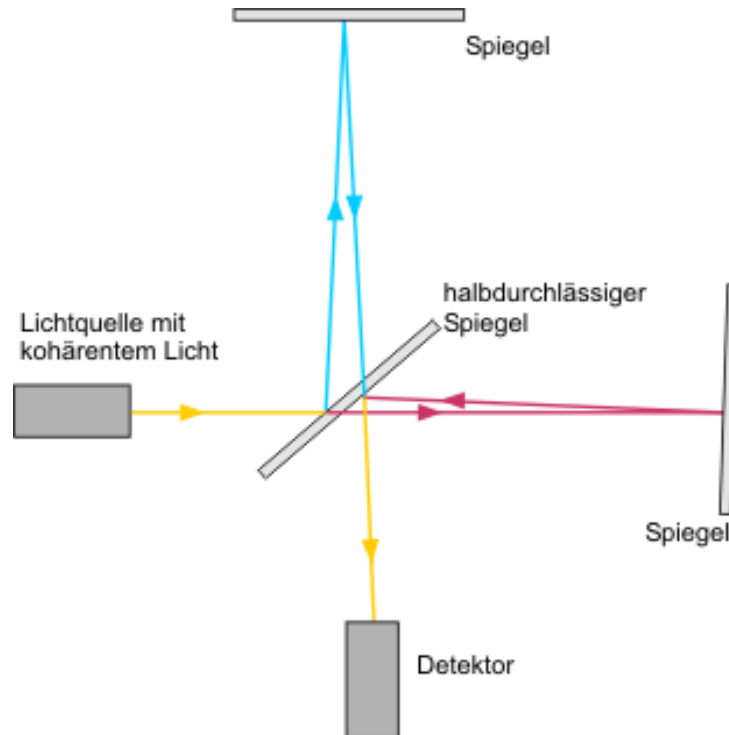


Abbildung 6: Aufbau des Michelson Interferometers. Durch leichtes Verkippen der Spiegel entsteht ein streifenförmiges Interferenzmuster

Ein zweites wichtiges Interferometer ist das Michelson-Interferometer, dessen Aufbau in Fig. 6 gezeigt ist. Das Michelson-Interferometer beruht auf der Zweistrahlinterferenz. Der Lichtstrahl von der Lichtquelle wird aufgespalten und durchläuft dann unterschiedlich lange optische Wege. Ist die optische Weglängendifferenz Δs ein Vielfaches der Wellenlänge λ so tritt konstruktive Interferenz auf. Mit dieser Technik werden in der Praxis genaue Längenmessungen durchgeführt.

2 Auflösungsvermögen einiger optischer Instrumente

- Auflösungsvermögen des Gitters, Rayleigh Kriterium:
Zwei Linien sind dann noch auflösbar, wenn das Maximum der einen Linie auf das erste Interferenz- bzw Beugungsminium der zweiten Linie fällt. Es gilt:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m \cdot N$$

N ist die Zahl der ausgeleuchteten Spalte, m die Beugungsordnung

- Auflösung eines Fernrohrs:
Durchmesser D , bei Beugung an kreisförmiger Öffnung ist das erste Minimum bei $\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$, zwei Punkte sind auflösbar, wenn für den Sehwinkel ε gilt:

$$\varepsilon > 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Auflösungsvermögen eines Fabry-Perot Interferometer:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m\tilde{F}$$

mit der Finesse $\tilde{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)}$ \Rightarrow Je größer das Reflexionsvermögen R des F-P Interferometers ist, desto besser ist auch seine Auflösung.

3 Doppelbrechung

Doppelbrechung ist ein Effekt, der in Medien auftritt, die asymmetrisch bzgl. der dielektrischen Eigenschaften sind. Die Ursache dafür kann z.B. ein asymmetrisches Kristallgitter sein. Der dielektrische Verschiebungsvektor ist dann gegeben durch

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \mathbf{E} \quad (8)$$

$\tilde{\varepsilon}$ ist der Dielektrizitätstensor. Bis jetzt haben wir ihn immer als skalar behandelt. Natürlich kann man den Tensor durch Hauptachsentransformation auf Diagonalform bringen. Dann gilt

$$D_i = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_i \cdot E_i \\ i \in \{1, 2, 3\}$$

Man unterscheidet bezüglich des Dielektrizitätstensors drei verschiedene Medien:

- optisch isotrope Medien: $\varepsilon_i = \varepsilon$
solche Medien haben wir bisher behandelt
- optisch einachsige Medien: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$
In diesen Medien gibt es eine Vorzugsrichtung, in unserem Fall o.b.d.A. die z-Achse. Man bezeichnet

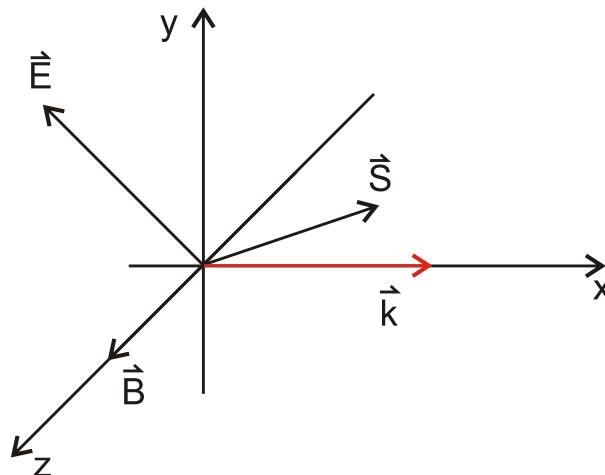
$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp} \\ \varepsilon_z = \varepsilon_{\parallel}$$

Die z-Achse nennt man auch optische Achse des Kristalls. Breitet sich Licht in diesem Medium entlang der optischen Achse aus, so 'sieht' das elektrische Feld in alle Richtungen dieselbe Dielektrizitätskonstante, d.h. die Ausbreitung des Lichts hängt nicht von der Polarisation ab. Für alle anderen Ausbreitungsrichtungen ist die Ausbreitung abhängig von der Polarisation des Lichts. Außerdem gibt es Abweichungen vom normalen Brechungsgesetz.

- optisch zweiachsige Medien: $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$

Ein Konsequenz wird bereits aus Gl. (8) deutlich. \mathbf{D} steht im Allgemeinen nicht mehr parallel zu \mathbf{E} . Zusätzlich folgt aus den Maxwellgleichungen $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$ und $\mathbf{B} \perp \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$. Daraus folgt aber, dass der Energiefluss \mathbf{S} nicht mehr parallel zu \mathbf{k} ist.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{D} \perp \mathbf{k} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} \perp \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \perp \mathbf{B} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{S} \\ \mathbf{B} \perp \mathbf{k} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{S} \end{array} \right\} \text{Bestimmungsgleichung für } \mathbf{E}$$



Aus den Maxwellgleichung folgt außerdem eine quadratische Bestimmungsgleichung für n :

$$\vec{e}_k \times \vec{e}_k \times \mathbf{E} + \frac{1}{n^2} \cdot \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = 0$$

Es gibt also i. A. zwei mögliche Lösungen für n .

Im Folgenden betrachten wir einen optisch einachsigen Kristall mit der optischen Achse entlang der z -Richtung. Breitet sich Licht entlang der optischen Achse aus, hat die quadratische Gl. (3) nur eine Lösung, also

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \Rightarrow n = \sqrt{\epsilon_{\perp}} \Rightarrow \text{keine Doppelbrechung}$$

Bei anderen Ausbreitungsrichtungen erhält man zwei Lösungen und es tritt Doppelbrechung auf. Man unterscheidet zwischen dem ordentlichen Strahl und dem außerordentlichen Strahl. Diese beiden Strahlen „sehen“ unterschiedliche Brechungsindizes n_o und n_{ao} . Beim außerordentlichen Strahl schwingt der elektrische Feldvektor parallel zur optischen Achse. Der elektrische Feldvektor des außerordentlichen Strahl steht senkrecht auf der optischen Achse.

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k} \perp \text{o.A.} \quad \Rightarrow \text{zwei Lösungen für } n$$

$$n_o = \sqrt{\epsilon_{\perp}} \quad \Rightarrow \mathbf{E} \parallel y\text{-Achse}$$

$$n_{AO} = \sqrt{\epsilon_{\parallel}} \quad \Rightarrow \mathbf{E} \parallel z\text{-Achse/ optische Achse}$$

Allgemein, bei Ausbreitung mit Winkel θ zur optischen Achse, hat n die Form

$$\frac{1}{n_{ao}^2} = \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{\parallel}}$$

$$n_o = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$$

Die Konsequenz ist, dass ordentlicher und außerordentlicher Strahl unterschiedlich gebrochen werden und es kann daher zu Doppelbildern kommen. Aufgrund dieser Eigenschaft hat das Phänomen Doppelbrechung seinen Namen.

Außerdem führen die unterschiedlichen Brechungsindizes zu unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten und damit zu einer Phasenverschiebung zwischen beiden Strahlen.

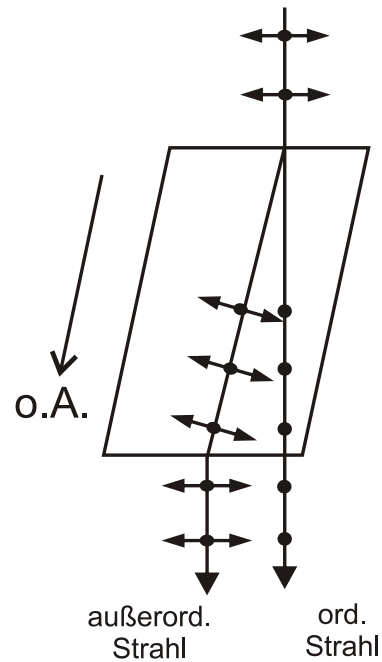


Abbildung 7: Aufspaltung von ordentlichem und außerordentlichem Strahl

$$v_{AO} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}}$$

$$v_O = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}$$

Anwendung findet die Doppelbrechung vor allem in der Erzeugung von linear bzw. zirkular polarisiertem Licht mittels $\frac{\lambda}{2}$ - und $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen. Man nutzt aus, dass es einen Phasenunterschied zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl nach dem Verlassen des Plättchens gibt. Trifft Licht senkrecht auf das Plättchen und steht die Ausbreitungsrichtung senkrecht auf der optischen Achse, verlaufen die beiden Strahlen parallel im doppelbrechenden Medium. Es kommt also nur zu einer Phasenverschiebung, nicht jedoch zu einer Aufspaltung.

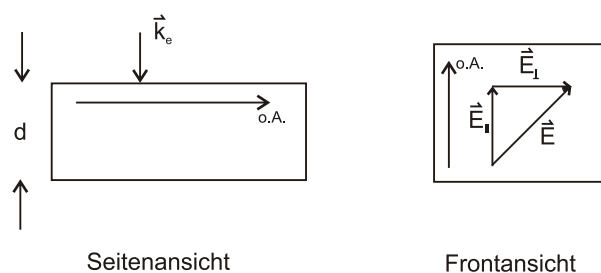


Abbildung 8: Senkrechter Einfall auf ein doppelbrechendes Plättchen

Die optische Weglängendifferenz ergibt sich zu:

$$\Delta s = d(n_o - n_{ao})$$

Daraus folgt eine Phasenverschiebung $\Delta\phi$ von

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_{ao}) \quad (9)$$

Das $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen führt zu einer optischen Weglängendifferenz von $\frac{\lambda}{2}$ und dreht somit die Polarisationsrichtung von linear polarisiertem Licht um 90° . Das $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen hingegen transformiert linear polarisiertes Licht in zirkular polarisiertes Licht.

Literatur

- [1] Vorlesungsskript Prof. Oberauer, TUM, WS 2008/09
- [2] Vorlesungsskript Prof. Gross, TUM, WS 2002/03
- [3] Zinth, Körner, *Physik III*, Oldenbourg Verlag
- [4] Demtröder, *Experimentalphysik III*