Lösungen der Übungsaufgaben zum Experimentalphysik III Ferienkurs

Max v. Vopelius, Matthias Brasse
25.02.2009

Aufgabe 1: Dreifachspalt

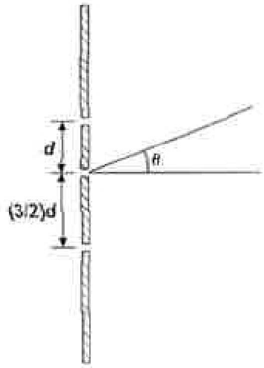


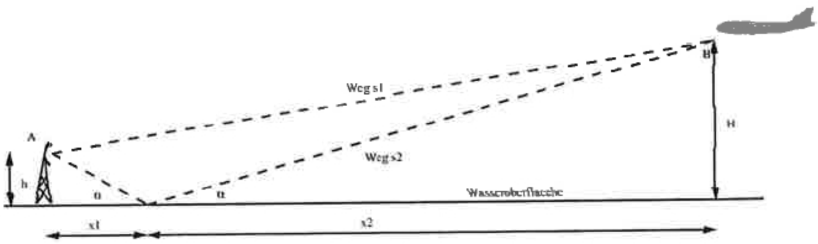
Abbildung 1: Spalt

Gegeben ist ein Dreifachspalt 1. Alle Spaltbreiten seien gleich. Die Spaltabstände seien d bzw. $3/2d$.

a) Bei welchem Winkel θ tritt das erste Hauptmaximum auf?
Lösung:
Die elektrische Feldstärke am Schirm ist die Summe der Feldstärken der einzelnen Spalten:
$$E(\theta) = E_1 + E_2 + E_3 = A + Ae^{i\delta} + Ae^{i\frac{5}{2}\delta}$$
mit $\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta$. Die Intensität ist prop. zum Betragsquadrat der Feldstärke.
$$I(\theta) \propto A^2 \left[3 + 2\left(\cos\delta + \cos\left(\frac{3\delta}{2}\right) + \cos\left(\frac{5\delta}{2}\right)\right)\right]$$
Für $\theta = 0$ erhalten wir
$$I(0) \propto 9A^2$$
Das erste Hauptmax. tritt bei $\delta = 4\pi$ auf. Der zugehörige Winkel ist
$$\sin\theta = \frac{2\pi}{d}$$

b) Das Ergebnis aus a) sei θ_1. Die Intensität in Richtung des Maximums nullter Ordnung sei I_0. Wie groß ist die Intensität in Richtung $\theta_1/2$?
Lösung:
$$I(\theta_1/2) \propto A^2 \left[3 + 2(\cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 5\pi)\right] = A^2 \propto \frac{I_0}{9}$$

Aufgabe 2: Radar
Ein Sportflugzeug am Nordrand des Starnberger Sees betreibt eine Radaranlage, die die Flugzeuge überwacht, die sich über dem See im Landeanflug befinden. Die Antenne befinde sich in $h = 10m$ Höhe über dem Wasserspiegel und empfängt und sendet Radiowellen von $\lambda = 20cm$.
In welcher Höhe H muss ein Flugzeug in $s = 5km$ Entfernung mindestens fliegen, damit es vom Radar nicht aufgezeichnet wird? (Näherung $h, H << s$, Taylorentwicklung $\sqrt{1+x}$ nötig)
Lösung



Das Radar registriert das Flugzeug, wenn dieses die Radiowellen reflektiert und somit die Antenne das „Echo“des Flugzeugs auffängt. Um das zu verhindern, müssen die beiden Wellen gerade weginterferieren. Die direkte Welle läuft von der Antenne zum Flugzeug, die zweite wird zunächst an der Wasseroberfläche reflektiert. Dort erfährt sie einen Phasensprung um $\lambda/2$. Damit sich die beiden Wellen weginterferieren, muss also beim Auftreffen aufs Flugzeug gerade ein Wegunterschied $-\Delta s = s_1 - s_2$ von λ vorliegen. Die Bedeutung von x_1, X_2 entnehme man der Zeichnung. Dann ist:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{h}{H} \quad x_1 + x_2 = s$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{s \cdot h}{H + h} \\
x_2 &= s\left(1 - \frac{h}{H + h}\right) = \frac{s \cdot H}{H + h} \\
\rightarrow \Delta s &= \sqrt{(H-h)^2 + s^2} - \sqrt{h^2 + x_1^2} - \sqrt{H^2 + x_2^2} = -\lambda
\end{aligned}$$

Einsetzen von x_1, x_2 liefert:

$$\Delta s = \sqrt{(H-h)^2 + s^2} - \sqrt{h^2 + \frac{s \cdot h}{H + h}^2} - \sqrt{H^2 + \frac{s \cdot H}{H + h}^2} = -\lambda$$

Jetzt benutzen wir die Tatsachen, dass $s >> h, H$ und entwickeln $\sqrt{1+x} \approx 1 + 1/2x....$

Dann folgt

$$s\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{H-h}{s}\right)^2\right]-\frac{s\cdot h}{H+h}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{s}\right)^2\right]-\frac{s\cdot H}{H+h}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{s}\right)^2\right]=-\lambda$$
$$s\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{H-h}{s}\right)^2\right]-s\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{s}\right)^2\right]=-\lambda$$
$$\frac{(H-h)^2}{2s}-\frac{(H+h)^2}{2s}=-\lambda$$

Die Minimalhöhe, bei der der Gangunterschied erstmals zur destruktiven Interferenz und damit zur Unterdrückung des Radarechos führt ist also:

$$H=s\frac{\lambda}{2h}=50m$$

Aufgabe 3: Bragg-Reflexion

In einem MnO-Kristall sind die Mn-Atome so angeordnet, dass sie die Eckpunkte und die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfelgitters mit der Kantenlänge $a_c = 0.442nm$ bilden. In einem geeigneten Koordinatensystem sind also die Koordinaten der an den Eckpunkten sitzenden Mn Atome durch $x = n_x \cdot a_c, y = n_y \cdot a_c, z = n_z \cdot a_c$ und die Koordinaten der auf den Seitenflächen sitzenden Mn-Atome durch $x' = (n_x+1/2)\cdot a_c, y' = (n_y + 1/2) \cdot a_c, z'* = (n_z + 1/2) \cdot a_c$ gegeben, wobei die n's ganze Zahlen sind.

a) Berechenen Sie die möglichen Winkel unter denen monochromatische Röntgenstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 0.154nm$ auf die zu den Würfelseiten parallelen Netzebenen auftreffen muss, damit an diesen Bragg-Reflexion auftritt.
Lösung:
Braggbedingung:

$$2d\sin\vartheta = m\lambda$$

Der Netzebenenabstand ist gegeben durch $d = 0.5a_c = 0.221nm$. Daraus folgen die beiden möglichen Glanzwinkel:

$$\vartheta_1 = 20.4^\circ$$
$$\vartheta_2 = 44.2^\circ$$

b) Zur Untersuchung der magnetischen Einheitszelle werden Neutronen mit der Energie $E = 2.227meV$ mit der gleichen Einfallsrichtung wie die Röntgenstrahlung am MnO-Kristall gebeugt. Dabei beobachten man Bragg-Reflexionen bei $\alpha_1 = 20.0^\circ$ und bei $\alpha_2 = 43.2^\circ$. Wie groß ist die magnetische Einheitszelle?
Lösung

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{\hbar^2k^2}{2m} \\ \rightarrow \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}} = 0.606nm \rightarrow d &= \frac{\lambda}{2\sin\alpha_1} = \frac{2\lambda}{2\sin\alpha_2} = 0.885nm \end{aligned}$$

Der Gitterabstand der magnetischen Einheitszelle ist genau doppelt so groß wie der der chemischen Einheitszelle.

Aufgabe 4: Transmissionsgitter
Bei einem Transmissionsgitter (Strichabstand d, Spaltbreite b) wird das dritte Hauptmaximum nicht beobachtet, weil es mit dem ersten Beugungsminimum zusammenfällt.

a) Berechnen Sie das Verhältnis d/b.
Lösung:
Aus der Vorlesung:
Bedingung für 3. Interferenzmaximum:

$$d \sin \theta = 3\lambda$$

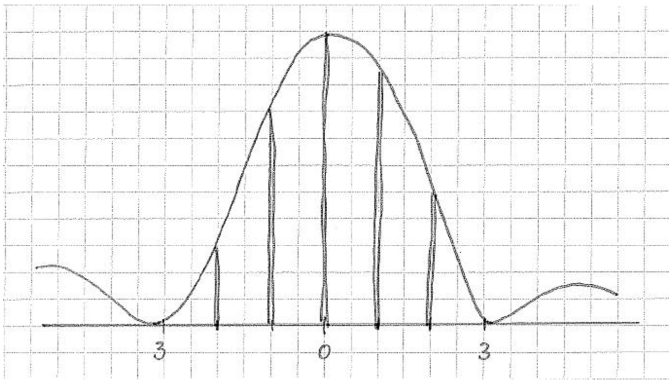
Bedingung für 1. Beugungsminimum:

$$b \sin \theta = \lambda$$

Daraus folgt

$$\frac{b}{d} = 3$$

b) Skizzieren Sie die Intensitätsverteilung.
Lösung:



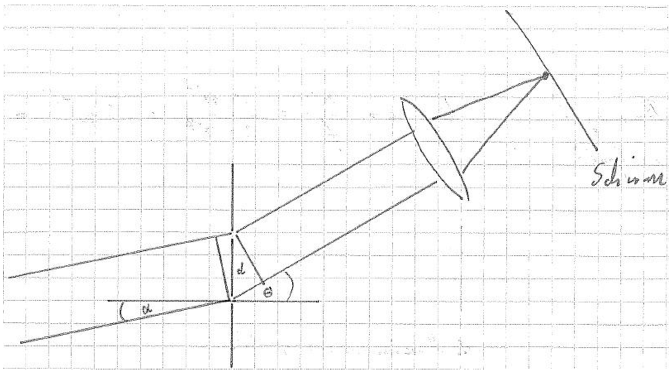
Aufgabe 5: Transmissionsgitter 2
Ein Spalt, der von einer Lichtquelle beleuchtet wird, befindet sich in der Brennebene einer Sammellinse ($f = 20cm$). Nach Durchgang durch die Linse fälllt das Licht auf ein senkrecht zur optischen Achse der Linse angeordnetes Beugungsgitter (Strichzahl $N = 1000$, Strichabstand $d = 0.01mm$). Bestimmen Sie die Breite x, die der Spalt höchstens haben darf, damit das Auflösungsvermögen des Gitters für Wellenlängen im Bereich von $\lambda = 500nm$ nicht beeinträchtigt wird.
Lösung:

Licht fällt unter einem Winkel α auf das Gitter. Die Bedingung für konstruktive Interferenz ist:

$$\Delta s = d \sin \theta_{max} - d \sin \alpha = k\lambda$$

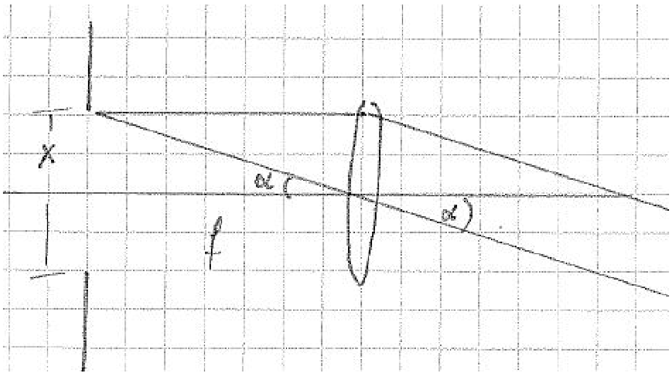
Die Bedingung für ein Minimum ist gegeben durch:

$$d \sin \theta_{min} = k\lambda + \frac{\lambda}{N}$$



Das Auflösungsvermögen des Gitters wird durch den Spalt nicht beeinflusst, solange der Winkel für das Minimum weit genug entfernt ist vom Winkel für das Maximimum. Durch Vergleich der obigen Formeln sieht man:

$$d \sin \alpha << \frac{\lambda}{N}$$



Aus der Zeichnung ergibt sich:

$$\tan \alpha = \frac{x}{2f} \approx \sin \alpha$$
$$\rightarrow d\frac{x}{2f} << \frac{\lambda}{N}$$
$$\rightarrow x << \frac{2f\lambda}{dN} = 20\mu m$$

Aufgabe 6: Neutronenbeugung

Ein Strahl von thermischen Neutronen mit einer kinetischen Energie von $25meV$ trifft auf ein Paar extrem dünner Spalte, die einen Abstand von $g = 0.1mm$ haben. Wie groß ist der Abstand zwischen benachbarten Minima auf einem neutronensensitiven Schirm, der sich $l = 20m$ hinter den Spalten befindet?

Lösung

Die Beziehung zwischen kinetischer Energie und de-Broglie Wellenlänge ist:

$$p = \sqrt{2E_{kin}m} = \frac{h}{\lambda}$$

Aus $E_{kin} = 25meV$ folgt die Wellenlänge zu $\lambda = 1.8 \cdot 10^{-10}m$. Die Bedingung für Minima am Doppelspalt sind (aus Vorlesung):

$$\Delta s = g \sin\theta = \frac{2m+1}{2}\lambda$$

Den Winkel ersetzt man durch

$$\tan\theta = \frac{x}{l} \approx \sin\theta \approx \theta$$

wobei x die Position des 1. Minimums ist. Dann folgt als Abstand der beiden ersten Minima Δx:

$$\Delta x = 2 \cdot x = \frac{l}{g}\lambda = 36\mu m$$

Aufgabe 6: Kohärenz

Welche optischen Weglängendifferenzen in den beiden Armen des Michelson-Interferometers sind höchstens zulässig, damit gerade noch Interferenzstreifen beobachtet werden können unter Verwendung von:

a) Laserlicht($\Delta\nu/\nu \approx 10^{-13}, \lambda \approx 550nm$; $\Delta\nu$ ist die spektrale Halbwertsbreite)
Lösung:
Die Kohärenzlänge berechnet sich aus der Lichtgeschwindigkeit c und der Kohärenzzeit $\tau = \frac{1}{\Delta\nu}$ zu:

$$l_c = c \cdot \tau = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda\nu}{\Delta\nu} = 5500km$$

Ist die Weglängendifferenz größer als die Kohärenzlänge, dann gibt es keine Interferenz mehr.

b) Licht aus einem angeregten Atomstrahl mit $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-7}, \lambda \approx 550nm$.
Lösung:

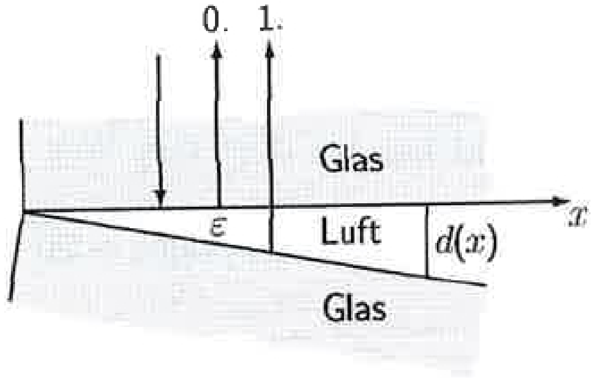
$$l_c = 550cm$$

c) weißem Licht?
Lösung:
Bei weißem Licht betrachten wir als Abschätzung die Wellenlängen zwischen $\lambda = 400nm$ und $\lambda = 800nm$. Dies führt zu $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{800nm-400nm}{600nm} = \frac{2}{3}$. Damit erhält man $l_c = 900nm$, also ungefähr eine Wellenlänge. Man sieht aus dieser einfachen Abschätzung, dass man weißes Licht als total inkohärent behandeln kann.

Aufgabe 7: Luftkeil

Zwei dicke planparallele rechteckige Glasplatten werden aufeinander gelegt. Auf einer Seite wird ein dünner Streifen zwischen die Glasplatten geschoben, so dass sich ein keilförmiger Luftspalt ergibt. Die Anordnung wird senkrecht mit parallelem Licht der Wellenlänge $\lambda = 589nm$ beleuchtet. In Reflexion betrachtet ergeben sich zwölf helle Interferenzstreifen pro cm.

a) Für welche optischen Wegdifferenzen Δs ergibt sich konstruktive Interferenz zwichen dem nullten und dem ersten Lichtstrahl?



Lösung:
Unter Berücksichtigung des Phasensprungs des 1. Strahls um π am optisch dickeren Glas:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s - \pi = m \cdot 2\pi; \qquad m = 0, 1, 2, 3...$$
$$\Rightarrow \Delta s = \frac{2m+1}{2}\lambda$$

b) Berechnen Sie den Keilwinkel ϵ.

Lösung:
Die optische Wegdifferenz zwischen 0. u. 1. Strahl ist:

$$\frac{2m+1}{2}\lambda = \Delta s = 2d(x) = 2x\tan\epsilon \qquad\qquad \Rightarrow \tan\epsilon = \frac{m+1/2)\lambda}{2x}$$

Abstand zwischen zwei Maxima mit $\Delta m = 1$: $\Delta x = 1/12cm$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\tan\epsilon} \qquad\qquad \rightarrow \tan\epsilon = \frac{\lambda}{2\Delta x}\tan\epsilon = 3.\cdot 10^{-4} \rightarrow \epsilon = 0.02°$$

c) Das Streifenmuster verschwindet in einem Abstand $x_1 \approx 10cm$ gemessen von der Berührungskante der beiden Glasplatten. Berechnen sie die Kohärenzlänge l des eingestrahlten Lichts.

Lösung:
Wird die Kohärenzlänge überschritten, verschwindet das Interferenzmuster, da die Bedingung für Interferenz nicht mehr erfüllt werden kann. Dies ist bei x_1 der Fall. Der erste reflektierte Lichtstrahl hat bis dort den Weg $\Delta s(x_1)$ zusätzlich zurückgelegt.

$$l \approx \Delta s(x_1) = 2x_1 \tan epsilon = 70\mu m$$

(Hinweis: Der Keilwinkel ϵ ist klein. Alle reflektierten Lichtstrahlen werden näherungsweise als senkrecht angenommen)