

# Ferienkurs Experimentalphysik III - Optik

Max v. Vopelius, Matthias Brasse

25.02.09

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Welleneigenschaften von Licht</b>	<b>1</b>
<b>2 Lichtbeugung</b>	<b>1</b>
2.1 Beugung am Einfachspalt . . . . .	1
2.2 Beugung an einer Lochblende . . . . .	4
<b>3 Interferenz</b>	<b>4</b>
3.1 Beugung am Doppelspalt . . . . .	5
3.2 Interferenzmuster am Gitter . . . . .	6
3.3 Beugung an Kristallen . . . . .	8
<b>4 Kohärenz von Lichtquellen</b>	<b>9</b>
4.1 Zeitliche Kohärenz . . . . .	9
4.2 Räumliche Kohärenz . . . . .	9

# 1 Welleneigenschaften von Licht

Beugung und Interferenz sind beides Phänomene, die von der Wellennatur des Lichts herrühren. Weiterhin kann man beide Phänomene nicht mehr mit der geometrischen Optik erklären. Bei der Beugung wird Licht beim Durchgang durch eine Blendenöffnung oder beim Passieren einer Kante aus der ursprünglichen Richtung abgelenkt, was geometrisch nicht nachzuvollziehen ist. Interferenz hingegen ist der Effekt, dass sich Wellenzüge überlagern können. Man kann dann je nach Überlagerungszustand eine Auslöschung oder Verstärkung der Lichtintensität beobachten. Zunächst gehen wir im Folgenden auf die Beugungserscheinungen ein, bevor wir uns der Interferenz zuwenden.

## 2 Lichtbeugung

### 2.1 Beugung am Einfachspalt

Wie schon erwähnt, ist Beugung ein Effekt, der beim Durchgang durch Öffnungen oder an Hindernissen auftreten kann. Voraussetzung ist, dass die Ausmessungen des Objekts, an dem das Licht gebeugt wird, ungefähr die Größenordnung der Wellenlänge der EM Welle haben muss.



Abbildung 1: Geometrische Optik beim Durchgang durch „breiten“Spalt [1]

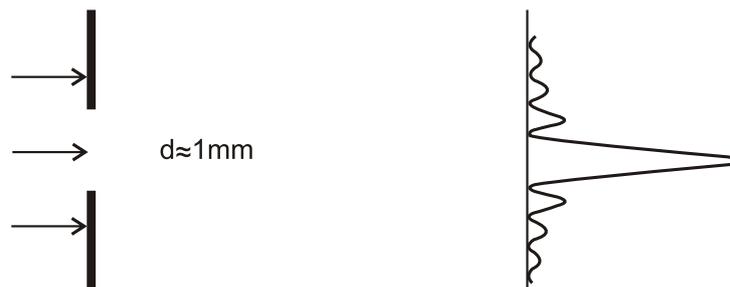
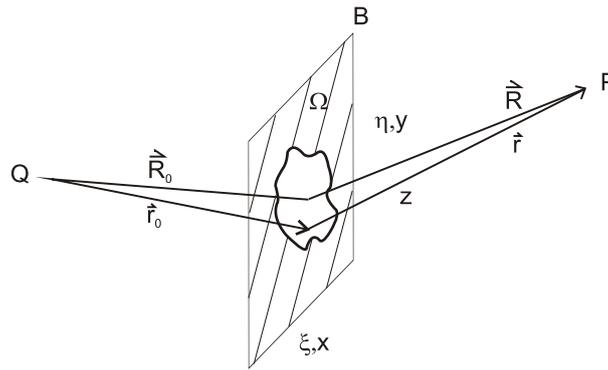


Abbildung 2: Beugung beim Durchgang durch „engen“Spalt [1]

Im Folgenden wird kurz auf die theoretische Behandlung des Beugungsphänomens eingegangen. Wir betrachten eine punktförmige Lichtquelle  $Q$ , die Licht der Wellenlänge  $\lambda$  isotrop emittiert. Dieses Licht trifft auf eine kreisförmige Blende mit beliebiger Öffnungsfläche  $\Omega$ . Im Punkt  $P$  wird das Licht beobachtet.

Es müssen nun mehrere Näherungen gemacht werden, um das Beugungsintegral analytisch lösen zu können.

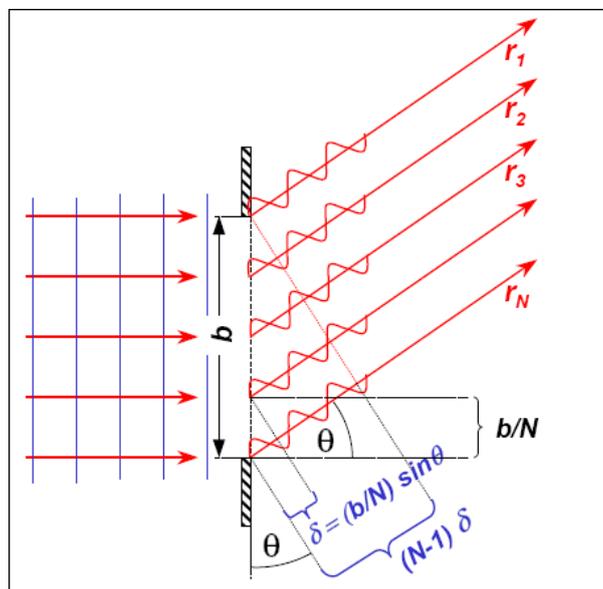
- Die Eigenschaften der Blende und der Blendenöffnung haben keinen Einfluss auf das von  $Q$  ausgesandte Licht



- Huygensche Prinzip - Jeder Punkt in der Öffnungsfläche  $\Omega$  ist Ausgangspunkt für eine isotrop in den Raum ausgestrahlte Kugelwelle. Dies sind die Sekundärwellen.
- Am Punkt  $P$  beobachtet man eine Überlagerung dieser Sekundärwellen. Das heißt, die Amplitude des Lichtes, das man am Punkt  $P$  beobachtet, hängt von den Amplituden und den Phasen der Sekundärwellen ab und zudem natürlich von dem Winkel unter dem beobachtet wird.

Fresnel und Kirchhoff haben eine Theorie basierend auf diesen Annahmen entwickelt, mit der für einfache Geometrien eine analytische Lösung des Beugungsproblem gefunden werden kann. Eine ausführliche Darstellung der Theorie kann in vielen Lehrbüchern gefunden werden. Wir werden auf kurz auf Lösung des Beugungsintegral im Falle des Einzelspalts eingehen und uns dann mit der Interpretation der Ergebnisse befassen.

Das Beugungsmuster am Einfachspalt lässt sich auch einfach anschaulich herleiten.



**Abbildung 3:** Jeder Punkt des Spalts ist Quelle einer phasenkohärenten Welle gleicher Amplitude

Eine ebene Welle trifft auf den Einfachspalt der Breite  $b$  und gemäß dem Huygenschen Prinzip wird von jedem Punkt des Spaltes eine Sekundärwelle ausgesandt. Angenommen wir haben  $N$  kohärente Sekundärwellen der Amplitude  $a$ , so erhält man die Gesamtamplitude  $\Phi$  am Beobachtungspunkt durch Summation über alle Teilwellen:

$$\begin{aligned}\Phi &= a \left[ e^{i(kr-\omega t)} + e^{i(k|r+\delta|-\omega t)} + \dots + e^{i(k|r+(N-1)\delta|-\omega t)} \right] \\ &= ae^{i(kr-\omega t)} \left[ 1 + e^{ik\delta} + \dots + e^{ik(N-1)\delta} \right]\end{aligned}$$

$\delta$  ist die optische Weglängendifferenz zwischen zwei benachbarten Sekundärwellen. Die eckige Klammer ist eine geometrische Reihe mit dem Wert  $(e^{ikN\delta} - 1)/(e^{ik\delta} - 1)$  und somit kann man nach Ausklammern von  $e^{ikN\delta/2}$  im Zähler bzw.  $e^{ik\delta/2}$  im Nenner schreiben

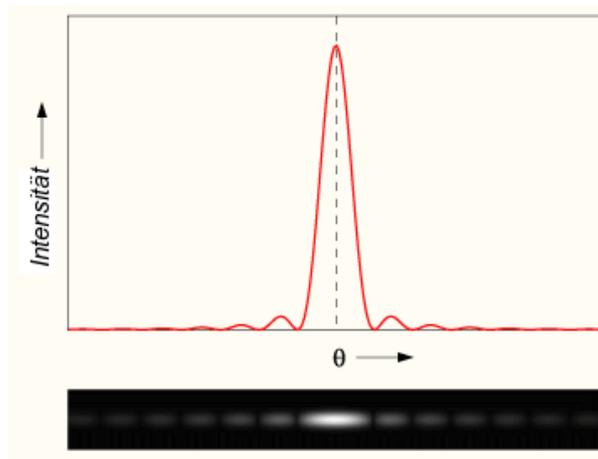
$$\Phi = ae^{i[kr+k(N-1)\delta/2-\omega t]} \left( \frac{\sin kN\delta/2}{\sin k\delta/2} \right)$$

Der Abstand zwischen zwei Teilwellen ist  $b/N$  und somit ist  $\delta = \frac{b}{N} \sin \theta$ . Dann folgt

$$\Phi = ae^{i[kr+k(N-1)b \sin \theta/2N-\omega t]} \left( \frac{\sin (bk \sin \theta/2)}{\sin (bk \sin \theta/2N)} \right)$$

Im Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  bekommt man als Intensität  $I = |\Phi|^2$

$$I = I_0 \cdot \left( \frac{\sin [bk \sin \theta/2]}{[bk \sin \theta/2]} \right)^2 \quad (1)$$



**Abbildung 4:** Intensitätsverteilung bei Beugung am Einfachspalt

Dies ist das charakteristische Fraunhofer-Beugungsmuster am Einfachspalt. Es gibt ein zentrales Hauptmaximum, das ca. 90% der Lichtintensität enthält. Die Intensität klingt dann zu beiden Seiten sehr schnell ab. Analysiert man Gleichung (1), so erhält man die Winkel bei denen Maxima und Minima der gebeugten Intensität auftreten. Die Nullstellen der Intensität sind gleichzeitig die Nullstellen des Zählers, also

$$\sin (bk \sin \theta/2) = 0$$

Daraus folgt:

$$\sin \theta = \pm \frac{2n\pi}{bk} = \pm \frac{n\lambda}{b} \quad n = 1, 2, 3... \quad (2)$$

Nebenmaxima der gebeugten Intensität treten auf, wenn  $\tan (bk \sin \theta/2) = bk \sin \theta/2$ . Die Lage der Nebenmaxima ist somit gegeben durch

$$\sin \theta = \pm 1.43 \frac{\lambda}{b}, \pm 2.46 \frac{\lambda}{b}, \dots \quad (3)$$

Für höhere Ordnung gilt näherungsweise für die Lage der Nebenmaxima

$$\sin \theta \approx \pm \frac{(2n+1)\lambda}{2b} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Überraschend ist, dass man durch diese einfache Betrachtung dasselbe Ergebnis erhält wie bei der Beugungstheorie nach Fraunhofer. Bei der Lösung des Beugungsintegrals nach der Fraunhoferschen Beugungstheorie geht man davon aus, dass die Lichtquelle und der Beobachtungspunkt unendlich weit vom Beugungsobjekt entfernt sind. Unter Berücksichtigung dieser Annahmen findet man, dass das Beugungsmuster durch die zweidimensionale Fourier-Transformierte der Transmissionsfunktion  $f(x, y)$  des Beugungsobjekts gegeben ist. In speziellen Fall des Einfachspalts ist die Transmissionsfunktion  $f(x, y)$  eine simple Rechtecksfunktion. Die Fouriertransformierte der Rechtecksfunktion ist eine  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$  Funktion, genauso so eine wie wir in Gl. (1) hergeleitet haben. Noch einige Anmerkungen zur Beugung am Einfachspalt:

- Mit zunehmender Spaltbreite  $b \gg \lambda$  rücken die Nebenmaxima immer näher zum Hauptmaximum und es findet ein Übergang zur geometrischen Abbildung des Spaltes statt
- Im sichtbaren Bereich wird rotes Licht am stärksten, violett Licht am wenigsten stark gebeugt ( $\lambda_{rot} \approx 700nm$ ,  $\lambda_{violett} \approx 400nm$ ).
- Fällt weißes Licht auf den Einfachspalt, so findet eine spektrale Aufspaltung bei Beugungsmaxima höherer Ordnung statt

## 2.2 Beugung an einer Lochblende

Mithilfe der Fouriertransformation lassen sich auch die Beugungsmuster anderer Transmissionsfunktion relativ einfach berechnen. Neben dem Einfachspalt ist auch noch die Beugung an einer kreisförmigen Öffnung wichtig, da das Auflösungsvermögen vieler optischer Instrumente durch derartige Beugungseffekte begrenzt ist. Die Fouriertransformierte einer kreisförmigen Öffnung mit dem Durchmesser  $D$  ist eine Besselfunktion. Die Minima der Intensitätsverteilung nach Durchgang durch die Lochblende findet man bei

$$\sin \theta^{min} \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}, 2.23 \frac{\lambda}{D}, \dots \quad (5)$$

Mit dieser Gleichung kann man das Auflösungsvermögen vieler optischer Instrumente berechnen. Nimmt man beispielsweise die Pupille des menschlichen Auges mit einem Durchmesser  $D = 1.5mm$ ,  $\lambda \approx 600nm$ , Augenlänge  $l = 2cm$  und  $n = 1.33$ , so folgt dass das zentrale Beugungsmaximum einen Durchmesser von ca.  $7\mu m$  auf der Netzhaut hat.

## 3 Interferenz

Bisher wurden nur Effekte behandelt, die sich auf die Veränderung einer einzelnen Wellenfront durch ein Beugungsobjekt bezogen haben. Wenn nun aber mehrere Wellenfronten miteinander wechselwirken, spricht man von Interferenz. Um Interferenzeffekte zu beschreiben, ist es wieder sinnvoll sich der Fouriertransformation zu bemächtigen. Wir haben am Beispiel des Einfachspaltes gesehen, dass die Beugungsintensität die Fouriertransformierte der Spaltfunktion ist. Bei der Interferenz kann man sich das Faltungstheorem

$$FT(f \otimes g) = FT(f) \cdot FT(g)$$

zunutze machen. Die Anwendung wird im Folgenden am Beispiel des Doppelspaltes erklärt.

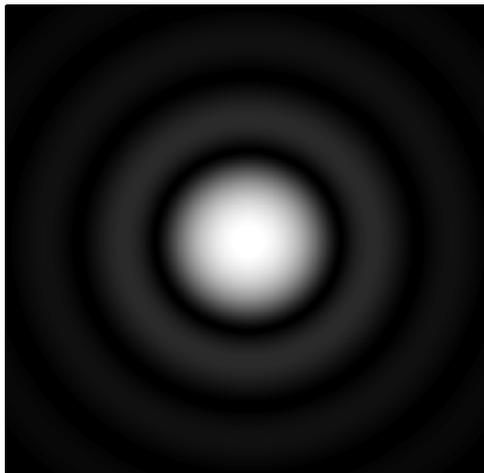


Abbildung 5: Beugungsmuster an kreisförmiger Öffnung

### 3.1 Beugung am Doppelspalt

Betrachten wir einen Doppelspalt der Spaltbreite  $b$  und dem Abstand der beiden Spaltmittelpunkt  $a$ . Eine ebene Wellenfront trifft senkrecht auf den Doppelspalt. Es treten zwei Effekte auf. Zunächst wird das Licht an beiden Spalten gebeugt. Zusätzlich wird die Beugungsintensität moduliert durch die Phasenbeziehung bzw. den Gangunterschied zwischen den Strahlen ausgehend von beiden Spalten. Übersetzt in die Sprache der Fouriertransformation bedeutet dies, dass das Interferenzmuster gegeben ist durch das Produkt des Beugungsmusters eines Einzelspaltes (Fouriertransformierte der Transmissionsfunktion eines Einfachspaltes) mit dem eines Paares von Delta-Funktionen. Die Fouriertransformierte des Einfachspaltes haben wir im vorigen Abschnitt schon berechnet (Gl. 1). Nun bleibt noch die Fouriertransformierte der 2 Dirac-Funktion bei  $x = \pm \frac{a}{2}$ . Diese ist gegeben durch

$$FT \left[ \delta \left( x \pm \frac{a}{2} \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \left( x \pm \frac{a}{2} \right) e^{ikx \sin \theta} dx$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} FT(f \otimes g) &\propto FT \left[ \delta \left( x - \frac{a}{2} \right) + \delta \left( x + \frac{a}{2} \right) \right] \cdot \left( \frac{\sin [bk \sin \theta / 2]}{[bk \sin \theta / 2]} \right) \\ &\propto \left[ \exp \left( -ik \frac{a}{2} \sin \theta \right) + \exp \left( -ik \frac{a}{2} \sin \theta \right) \right] \cdot \left( \frac{\sin [bk \sin \theta / 2]}{[bk \sin \theta / 2]} \right) \end{aligned}$$

Für die Intensität des Beugungsbildes erhalten wir somit bei der Beugung am Doppelspalt

$$I_{DS}(\theta) = I_0 \cdot \cos^2 \left( k \frac{a}{2} \sin \theta \right) \cdot \left( \frac{\sin [bk \sin \theta / 2]}{[bk \sin \theta / 2]} \right)^2 \quad (6)$$

Das Beugungsbild beim Doppelspalt ist also jenes des Einzelspaltes moduliert mit einer  $\cos^2$  Funktion. Die Nullstellen dieser Funktion und somit die Orte destruktiver Interferenz treten auf bei

$$\left( k \frac{a}{2} \sin \theta \right) = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Führt man die optische Weglängendifferenz  $\Delta s$  ein, erhält man als Bedingung für destruktive Interferenz:

$$\Delta s = a \sin \theta = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Konstruktive Interferenz erhält man bei

$$\Delta s = a \sin \theta = \pm m \lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

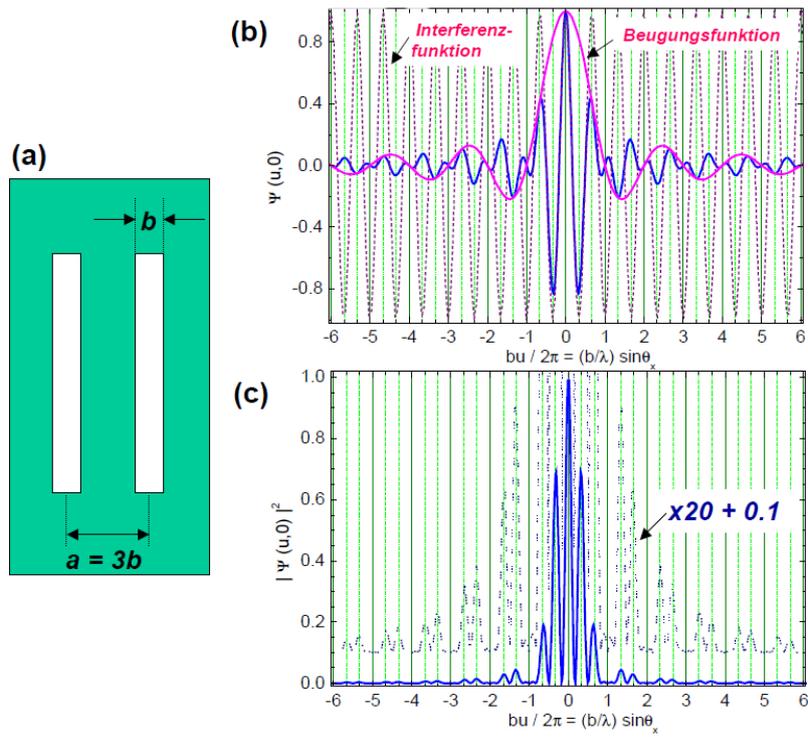


Abbildung 6: Geometrie und Beugungsmuster beim Doppelspalt [2]

### 3.2 Interferenzmuster am Gitter

Ein Gitter ist eine Anordnung aus  $N$  langen und schmalen Spalten mit konstantem Abstand  $a$ . Die Transmissionsfunktion des Gitters kann wieder mithilfe des Faltungstheorems ausgedrückt werden und ist gegeben durch  $f(x) = f_{\text{Gitter}}(x) \otimes f_{\text{Spalt}}(x)$ . Wir betrachten im Folgenden nur die Beiträge von  $f_{\text{Gitter}}$  zum Beugungsmuster. Die gesamte Intensität erhält man dann wieder durch Multiplikation mit der Fouriertransformierten des Einfachspalts, wie oben beim Doppelspalt.

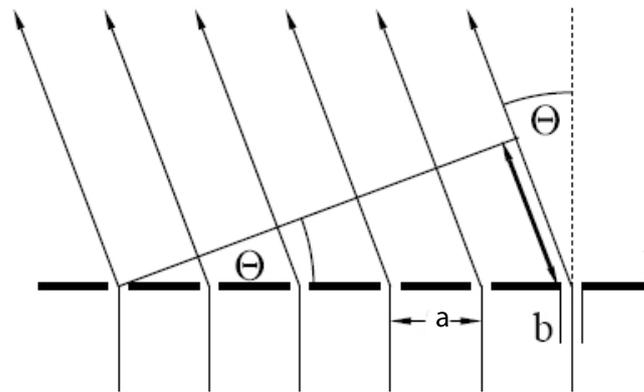
$$f_{\text{Gitter}} = \sum_{m=-N/2}^{N/2} \delta(x - ma) \quad (9)$$

Die Beugungsintensität ist proportional zur Fourier-Transformierten von  $f_{\text{Gitter}}$

$$\Phi_{\text{Gitter}}(\theta) \propto \sum_{m=-N/2}^{N/2} \exp(-imka \sin \theta) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} [\exp(-ika \sin \theta)]^m$$

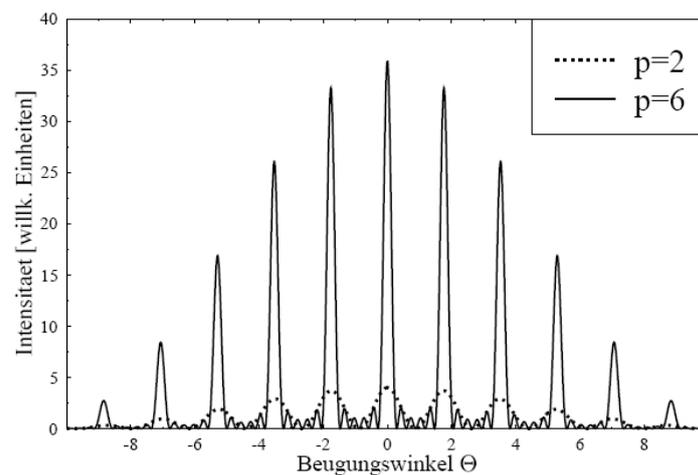
Dies ist wiederum eine geometrische Reihe. Wertet man diese aus ergibt sich

$$\Phi_{\text{Gitter}} \propto \frac{1 - \exp(-iNka \sin \theta)}{1 - \exp(-ika \sin \theta)}$$



Die Intensität ist somit gegeben durch

$$I_{\text{Gitter}} \propto |\Phi_{\text{Gitter}}|^2 = I_0 \frac{\sin^2(Nka \sin \theta/2)}{\sin^2(ka \sin \theta/2)}$$



**Abbildung 7:** Intensitätsverteilung nach Beugung am Gitter mit  $p$  Spalten

In Figur 7 ist ein Interferenzbild dargestellt mit der Spaltanzahl  $N = 2$  bzw.  $N = 6$ . Es sind zwei unterschiedliche Sorten von Maxima vertreten. Es gibt intensitätsstarke Hauptmaxima. Zwischen den Hauptmaxima liegen  $N - 2$  Nebenmaxima geringerer Intensität. Die Bedingung für das Auftreten von Hauptmaxima bei senkrechtem Lichteinfall auf das Gitter ist gegeben durch

$$\Delta s = a \sin \theta = \pm m \lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Bei dieser Bedingung verschwindet sowohl der Zähler als auch der Nenner von Gl. (3.2). Die einzelnen Hauptmaxima nennt man Beugungsmaxima  $m$ -ter Ordnung.  $\Delta s$  ist wie vorher der Gangunterschied von Teilwellen, die von benachbarten Spalten ausgehen.

Die Intensitätsminima findet man bei den Nullstellen des Zählers, die nicht gleichzeitig Nullstellen des Nenners sind. Diese Bedingung lässt sich formulieren zu

$$\Delta s = a \sin \theta = \pm m \lambda \pm \frac{n}{N} \lambda$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad n = 1, 2, \dots, N - 1$$

Die Nebenmaxima treten auf bei

$$\Delta s = a \sin \theta = \pm m \lambda \pm \frac{2n+1}{N} \lambda$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad n = 1, 2, \dots, N-2$$

Trifft das Licht nicht senkrecht auf das Gitter, sondern fällt unter einem Winkel  $\theta_0$  zur Normalen ein, so muss die optische Weglängendifferenz angepasst werden. Es gilt dann

$$\Delta s = a(\sin \theta - \sin \theta_0)$$

Bisher haben wir die Beugungseffekte des Einfachspalts vernachlässigt. In einem realen Beugungsgitter erhält man dann das Beugungsbild als Produkt der Fourier-Transformierten des Gitters (vgl. Gl. (3.2)) mit derjenigen des Spaltes (vgl. Gl. (1)). Somit erhält man

$$I(\theta) = I_0 \cdot \frac{\sin^2(Nka \sin \theta/2)}{\sin^2(ka \sin \theta/2)} \cdot \left( \frac{\sin [bk \sin \theta/2]}{bk \sin \theta/2} \right)^2 \quad (11)$$

Ein paar Dinge gibt es bei der Beugung am Gitter zu beachten. Mit zunehmender Spaltanzahl  $N$  werden die Hauptmaxima immer schärfer und die Nebenmaxima haben immer weniger Intensität. Beleuchtet man das Gitter mit weißem Licht, so findet, abgesehen vom nullten Maximum, immer eine spektrale Aufspaltung des Lichts statt. Deshalb nimmt man das Gitter gerne als Spektralapparat. Es kann jedoch vorkommen, dass einzelne Maxima der Interferenz ausgelöscht sind. Das passiert genau dann, wenn ein Maxima der Interferenz mit einem Minima der Beugung am Spalt zusammenfällt.

Eine andere wichtige Eigenschaft von Gitterspektrometern ist deren Auflösungsvermögen. Das Auflösungsvermögen beim Gitter ist definiert als  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$ . Man findet

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN} \quad (12)$$

wobei  $m$  die Beugungsordnung und  $N$  die Anzahl an beleuchteten Spalten ist.

### 3.3 Beugung an Kristallen

Beugungs- und Interferenzerscheinungen treten selbstverständlich auch bei Raumgittern auf. Dies können Kristalle mit einer periodischen Gitterstruktur sein, die man durch die Gitterkonstante  $d$  charakterisieren kann. Die Gitterkonstante hat im Normalfall die Größenordnung  $\text{\AA}$ . Daraus folgt, dass Röntgenstrahlung mit einer Wellenlänge von  $\lambda \approx 10^{-10} m$  an den Netzebenen des Kristalls gebeugt werden kann (Fig. 8).

Der Gangunterschied zwischen den Strahlen (1) und (2) ergibt sich zu:

$$\Delta s = 2d \sin \theta \quad (13)$$

Konstruktive Interferenz erhält man, wenn der Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist. Daraus folgt die berühmte Bragg-Bedingung

$$2d \sin \theta = k \cdot \lambda \quad k = \pm 0, 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

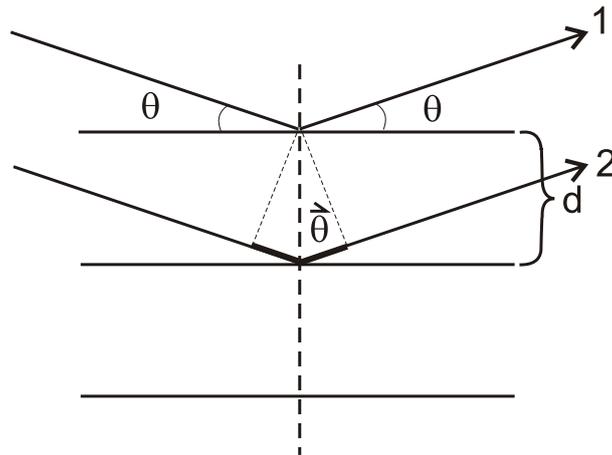


Abbildung 8: Reflexion an den Netzebenen des Kristalls [1]

## 4 Kohärenz von Lichtquellen

Um Interferenzerscheinungen überhaupt beobachten zu können, müssen die interferierenden Teilwellen kohärent sein. Dies bedeutet, dass die Orts- und Zeitabhängigkeit ihrer Phasen bis auf einen konstanten Faktor identisch sein muss. Bisher sind wir immer von vollkommen kohärenten Lichtquellen ausgegangen. In der Realität ist das aber nicht der Fall. Normalerweise hat man es mit Lichtpulsen endlicher Dauer zu tun. Außerdem gibt es immer eine endliche Ausdehnung der Lichtquellen. Um Kohärenz besser zu verstehen, unterscheidet man zwischen räumlicher und zeitlicher Kohärenz.

### 4.1 Zeitliche Kohärenz

Die Kohärenzzeit  $t_c$  ist die Zeit, innerhalb derer eine feste Phasenbeziehung zwischen den Teilwellen aufrechterhalten ist. Zudem führt man die Kohärenzlänge ein. Diese ist gegeben durch

$$l_c = t_c \cdot c \quad (15)$$

Weißes Licht beispielsweise ist nahezu total inkohärent, da es aus einem breiten Wellenlängenbereich von 400-800nm besteht und daher keine feste Phasenbeziehung zwischen 2 Teilwellen bestehen kann. Ein Laser hingegen, mit einer sehr schmalbandigen Emission, kann Kohärenzlängen bis in den km Bereich haben.

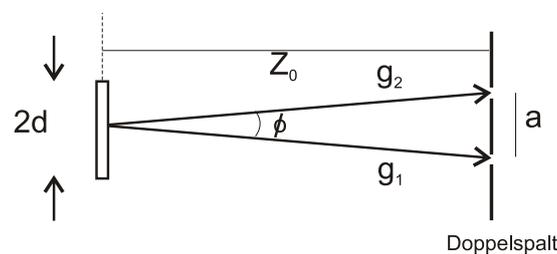


Abbildung 9: Zur Veranschaulichung der räumlichen Kohärenz

### 4.2 Räumliche Kohärenz

Bisher sind wir immer von punktförmigen Lichtquellen ausgegangen. In Wirklichkeit haben Lichtquellen immer eine endliche Ausdehnung. Als Beispiel zum Verständnis der räumlichen

Kohärenz betrachten wir den Doppelspalt, der von einer flächigen Lichtquelle beleuchtet wird (Figur 9). Aufgrund der Geometrie kann es zu einem Wegunterschied  $\Delta g = g_1 - g_2$  kommen. Ist dieser gerade eine halbe Wellenlänge oder größer, so wird das übliche Interferenzbild zerstört.

## Literatur

- [1] Vorlesungsskript Prof. Oberauer, TUM, WS 2008/09
- [2] Vorlesungsskript Prof. Gross, TUM, WS 2002/03
- [3] Zinth, Körner, *Physik III*, Oldenbourg Verlag
- [4] Demtröder, *Experimentalphysik III*