

Ferienkurs Experimentalphysik 3 - Geometrische Optik

Matthias Brasse, Max v. Vopelius

24.02.2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung Geometrische Optik	2
2	Grundlegende Konzepte	2
3	Die optische Abbildung	2
3.1	Reelle und virtuelle Abbildung	2
3.2	Abbildung an einem Kugelspiegel	3
3.3	Abbildung durch brechende Grenzflächen	3
3.4	Vorzeichen bei Abbildungen	4
3.5	Abbildungsgleichung für dünne Linsen	4
3.6	Geometrische Bildkonstruktion	5
3.7	Transversale und longitudinale Vergrößerung	5
3.8	Dicke Linsen und Linsensysteme	5
3.8.1	System aus zwei dünnen Linsen	6
3.8.2	Brechkraft einer dicken Linse	6
3.9	Abbildungsfehler	6
3.9.1	Monochromatische Aberration	7
3.9.2	Chromatische Aberration	8
3.10	Bildhelligkeit	8
4	Optische Instrumente	9
4.1	Prisma	9
4.2	Kamera	9
4.3	Das Auge	10
4.4	Vergrößernde optische Instrumente	10
4.4.1	Die Lupe (Sammellinse)	10
4.4.2	Fernrohr	11
4.4.3	Mikroskop	11

1 Einleitung Geometrische Optik

Optische Systeme bestehen i.A. aus folgenden Elementen:

- dünne Linsen: → Brillen, Lupen, ... bündeln o. zerstreuen Licht
- zusammengesetzte Linsen: → werden als Ergänzung zu dünnen Linsen, oder um verschiedene Fehler (Aberrationen) zu korrigieren. z.B. Mikroskopobjektiv
- Ebene Spiegel und Prisma: → kehren optischen Weg des Lichts um, werden benutzt ein Bild umzukehren, z.B. Fernglas
- Sphärische und parabolische Spiegel: → ersetzen Linsen in großen optischen Instrumenten z.B. Teleskopen

2 Grundlegende Konzepte

Das Fermat'sche Prinzip¹ besagt, dass der vom Licht zurückgelegte Weg (der optische Weg²) zwischen zwei Punkten stationär (d.h. meistens minimal) ist. Mathematisch:

$$\left(\frac{\delta AB}{\delta S} \right)_{S_0} = \delta \int_A^B n(s) ds = 0$$

Dabei bezeichnet $n(s)$ den Brechungsindex an der Stelle s . Aus diesem Prinzip folgt insbesondere, dass der Lichtweg bei Reflexion an Spiegeln oder ähnlichem den kürzesten Weg nimmt, daraus folgt sofort das
→ Reflexionsgesetz: Einfallswinkel = Ausfallswinkel

Der optische Weg ist wie aus Gleichung 1 zu erkennen ist die Strecke mal den Brechungsindex am aktuellen Wegpunkt. Damit lässt sich das Snellius'sche Brechungsgesetz ableiten, das besagt

$$\rightarrow n_1 \sin \theta_e = n_2 \sin \theta_t$$

wobei θ_e und θ_t die an der Grenzfläche auftretenden Winkel sind.

3 Die optische Abbildung

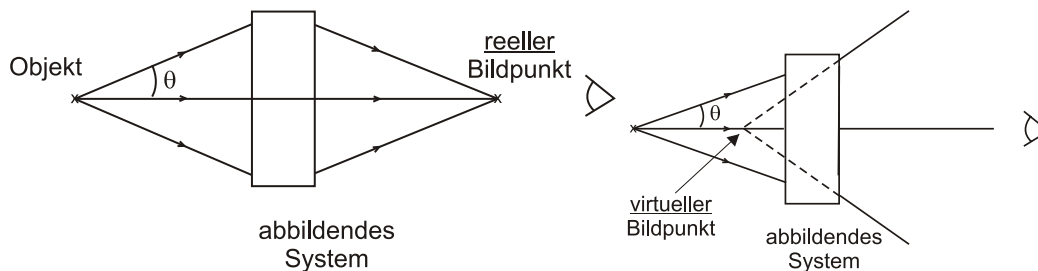
Abbildungsvorschrift in der Optik:

- alle vom Objektpunkt ausgehenden Strahlen treffen sich im Bildpunkt wieder
- im idealen Fall winkelerhaltend und maßstabsgetreu, also nicht verzerrend

Für reale Abbildungen muss man davon abweichen, aber Strahlen müssen sich in der Nähe treffen²(statt Punkten erhält man Flecken). Das gilt im *paraxialen* Fall, das bedeutet das die Strahlen achsennah und mit einem kleinen Winkel zur Achse ankommen, also gilt:

$$\sin \Theta \simeq \tan \Theta \simeq \Theta$$

3.1 Reelle und virtuelle Abbildung

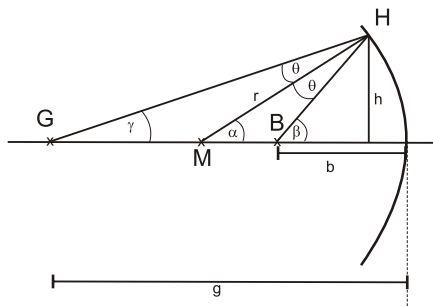


Dabei wird der Betrachter (Auge) *rechts*, der Gegenstand *links* des abbildenden Systems gezeichnet. Abstände werden mit kleinen Buchstaben, Punkte mit großen bezeichnet. Ein reelles Bild kann mit einem Schirm aufgefangen werden, ein virtuelles nicht.

¹ableitbar aus den Maxwell-Gleichungen

²“sphärische Abberation“ → später!

3.2 Abbildung an einem Kugelspiegel



$$\alpha + \theta + (\pi - \beta) = \pi$$

$$\Rightarrow \theta = \beta - \alpha = \alpha - \gamma$$

- Paraxiale Näherung ($d = 0$):

$$\tan \gamma \approx \gamma \approx \frac{h}{g}$$

$$\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{h}{r}$$

$$\tan \beta \approx \beta \approx \frac{h}{b}$$

- wegen $\beta + \gamma = 2\alpha$

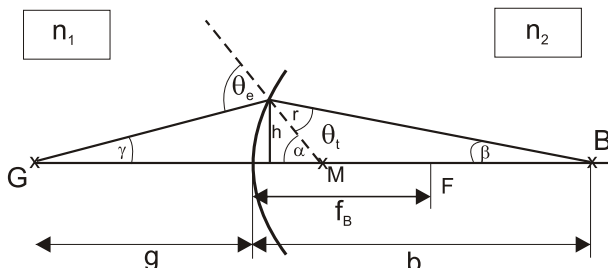
$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}$$

Einführung der Brennweite f . Ist der Gegenstand im unendlichen ($g \rightarrow \infty$) entsteht das Bild im Brennpunkt ($b = f$). Brennpunkt F ist der Sammelpunkt aller Strahlen, die parallel von sehr großer Entfernung (z.B. Sonne) kommen.

- Strahlen \parallel zur optischen Achse gehen durch den Brennpunkt und Strahlen durch f werden zu parallelen Strahlen (Umkehrprinzip)
- Brennpunkt ist abhängig vom Abstand der Strahlen zur optischen Achse. In paraxialer Näherung (kleine Abstände) ist $\Delta F = 0$. Parabolspiegel haben dieses Problem nicht.
- Abbildungsgleichung gültig auch für *konvexe* Spiegel, formal ist der Radius $r < 0$. Bildabstand $b < 0$ bedeutet virtuelles Bild (geschieht auch für $g < f$), also das Bild befindet sich hinter der Spiegelfläche.

3.3 Abbildung durch brechende Grenzflächen

wichtigste Grenzfläche: Kugelfläche (andere z.B. Hyperbel o. Ellipse Betrachtung analog)



paraxiale Näherung ($\sin \Theta \simeq \Theta$, gültig für $r \gg h$ bzw. $h \ll g$):

$$\begin{aligned} n_1 \cdot \sin \theta_e &= n_2 \sin \theta_t \\ \Rightarrow n_1 \theta_e &= n_2 \theta_t \end{aligned}$$

aus $\theta_e = \gamma + \alpha$ und $\theta_t = \alpha - \beta$ folgt die Abbildungsgleichung für brechende Kugelflächen:

$$\Rightarrow \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Es gibt zwei Brennweiten:

- bildseitige Brennweite: $g \rightarrow \infty, b = f_B = \frac{n_2 \cdot r}{n_2 - n_1}$
- gegenstandsseitige Brennweite: $b \rightarrow \infty, g = f_G = \frac{n_1 \cdot r}{n_2 - n_1}$

Daraus lassen sich zwei weitere Zusammenhänge herleiten

- $f_B - f_G = r, \quad \frac{f_B}{f_G} = \frac{n_2}{n_1}$

3.4 Vorzeichen bei Abbildungen

S bezeichnet den Schnittpunkt der optischen Achse mit dem optischen Instrument (Kugelfläche, Linse etc.). Konvention für die Vorzeichen ist:

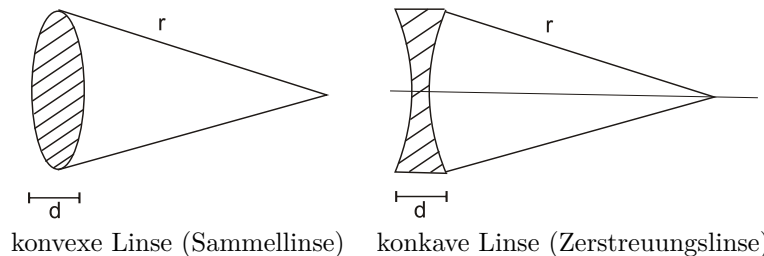
- Alle Lichtstrahlen laufen von links nach rechts
- nach rechts konkave Oberflächen haben positiven Radius
- Winkel von Strahlen nach rechts oben sind positiv (zur Achse)

Daraus ergibt sich:

- g, f_G sind positiv, wenn die Punkte G, F_G links von S liegen (Änfang des Strahls").
- b, f_B sind positiv, wenn die Punkte B, F_B rechts von S liegen (SZiel").
- r ist Positiv, wenn der Mittelpunkt M rechts von S liegt.
- Bei Mehrfachabbildungen wird der B der ersten Abbildung der G der zweiten und so weiter.

3.5 Abbildungsgleichung für dünne Linsen

"Linse" bedeutet, dass Objekt und Bildpunkte im selben Medium liegen, und nur in der Linse nicht. Zum Beispiel Brechungsindex der Linse $n > 1$, eingebettet in Luft ($n = 1$). Dann ist eine Sammellinse bikonvex (in der Mitte dicker als am Rand), alles andere sind Zerstreuungslinsen.



konvexe Linse (Sammellinse) konkave Linse (Zerstreuungslinse)

Dabei bedeutet *dünn*, dass der Abstand d der beiden Grenzflächen klein gegen die Radien r ist. Für $n_1 = n_3 = 1$ (Luft) und n (Linse):

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f}$$

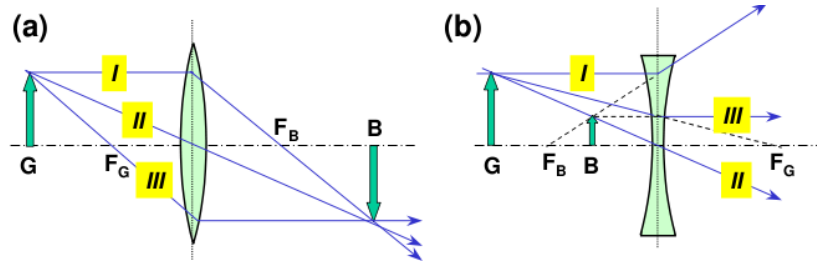
(Herleitung durch Hintereinanderausführung von $\frac{n_1}{g_1} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}$)

- Man definiert die "Brennkraft" D als reziproken Wert der Brennweite f

$$D = \frac{1}{f} \text{ Einheit Dioptrie}$$

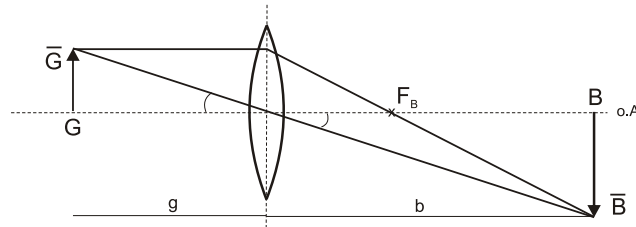
- Die Brennebene steht senkrecht zur optischen Achse durch den Brennpunkt
- Gegenstands- und Bildbrennweite sind gleich wenn auf beiden Seiten gleiches Medium

3.6 Geometrische Bildkonstruktion



1. Strahlen, die parallel zur optischen Achse einfallen gehen durch bildseitigen Brennpunkt (Brennstrahlen)
2. Strahlen durch den Mittelpunkt der Linse werden nicht abgelenkt (Mittelpunktsstrahlen)
3. Strahlen durch Gegenstandsbrennpunkt F_G verlaufen nach der Linse parallel (Brennstrahlen)

3.7 Transversale und longitudinale Vergrößerung



Transversale Vergrößerung (aus Strahlensatz ableitbar)

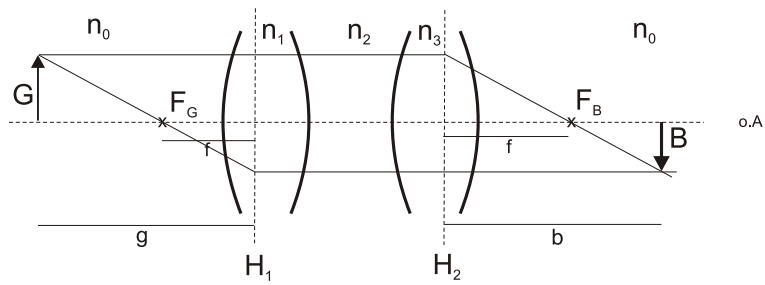
$$V_T = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g} = \frac{f}{f-g}$$

Longitudinale Vergrößerung (entlang der optischen Achse), ableitbar aus $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

$$V_L = \frac{db}{dg} = \frac{-f^2}{(g-f)^2} = V_T^2$$

3.8 Dicke Linsen und Linsensysteme

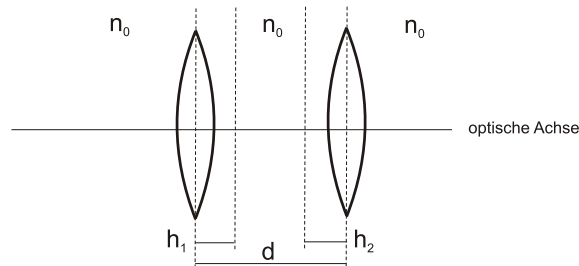
- Annahme: Vor und hinter dem abbildenden System sei der gleiche Brechungsindex n_0 . Darum gibt es zwei Hauptebenen $H_{1,2}$ so, dass gilt $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ mit g bezogen auf H_1 und b bezogen auf H_2
- Strahlenkonstruktion wie bei dünner Linse, wobei zwischen den Hauptebenen die Strahlen parallel zur optischen Achse verlaufen:



- Bestimmung von f und $H_{1,2}$:

1. Experimentell: z.B.
 - $g \rightarrow \infty \Rightarrow F_B$
 - $b \rightarrow \infty \Rightarrow F_G$
 - 1:1 Abbildung $\Rightarrow g = b = 2f \Rightarrow$ Lage H_1 und H_2
2. analytische Lösung über Abbildungsgleichung i.A. kompliziert, besser mit Matrizenmethode (nicht Vorlesungsinhalt)

3.8.1 System aus zwei dünnen Linsen



d ist der Abstand der Linsen, h_i der Abstand der Hauptebenen zur Mitte der Linse

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}$$

$$h_1 = \frac{f \cdot d}{f_2}, h_2 = \frac{f \cdot d}{f_1}$$

Für $d \ll f_i$ ($i = 1, 2$)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$D = D_1 + D_2$$

3.8.2 Brechkraft einer dicken Linse

d bezeichnet hier die Dicke der Linse.

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n - 1) d}{nr_1 r_2} \right]$$

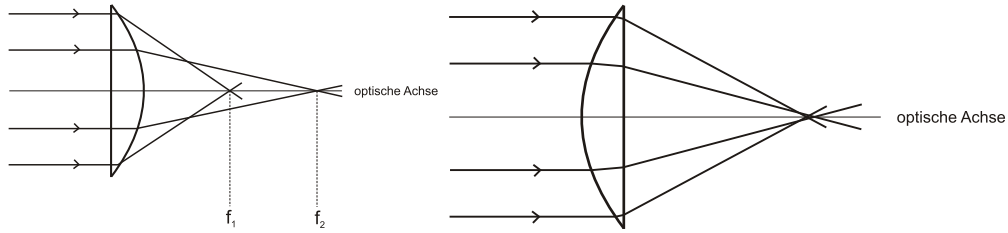
Herleitung ebenfalls unter Verwendung der Matrixmethode.

3.9 Abbildungsfehler

Eine perfekte Abbildung eines räumlich ausgedehnten Objekts ist nur im trivialen Fall der Abbildung an ebenen Spiegeln möglich. Abbildungsfehler werden in monochromatische und chromatische Aberrationen (=Abbildungsfehler) unterteilt. Monochromatische Aberrationen treten auch bei Licht nur einer Wellenlänge auf, während chromatische Licht verschiedener Wellenlängen braucht.

3.9.1 Monochromatische Aberration

1. Sphärische Aberration: Achsfertne Strahlen haben wesentlich kleinere Brennweite als achsnahe.

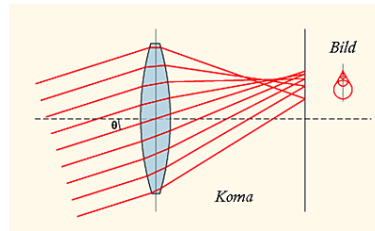


Verringerung:

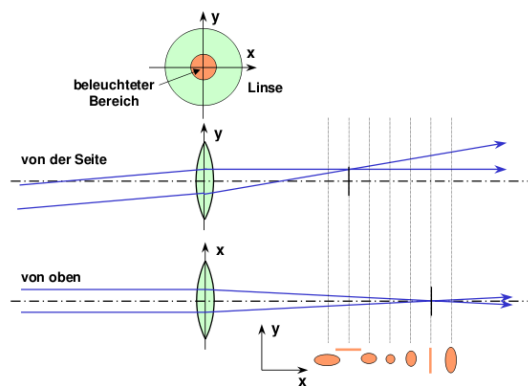
- nur achsnahe Strahlen zulassen
- passend gerechnetes Linsensystem verwenden
- Winkel der Strahlen mit Oberfläche minimieren (vgl. Beispiel)
- asphärische Oberflächen

Korrekturen sind im Allgemeinen nur für bestimmte Gegenstandsweiten geeignet.

2. Koma (Assymetriefehler): Schräg zur optischen Achse einfallende Strahlen werden auch abseits der optischen Achse gebündelt. Vollständige Korrektur möglich mit Hilfe von Aplanaten³.



3. Astigmatismus: Unterschiedliche Einfallswinkel für Licht in x- und y-Richtung bedeuten verschiedene Brennweiten. In den jeweiligen Brennpunkten der Achsen werden keine Punkte sondern Linien der jeweils anderen Achse abgebildet.



Beim menschlichen Auge ist Astigmatismus durch eine Rotationsasymmetrie um die optische Achse verursacht, die den gleichen Effekt verursacht.

³bestehend aus zwei symmetrisch angeordneten Achromaten, vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Aplanat>

3.9.2 Chromatische Aberration

Dispersion bedeutet Abhängigkeit einer Größe von der Wellenlänge. In der Optik ist der Brechungsindex n (i.A.) abhängig von der Wellenlänge λ . Damit ist auch die Brennweite abhängig von λ und für eine Linse ($r_1, r_2, n(\lambda)$) gilt

$$D(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} = (n(\lambda) - 1) \underbrace{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}_{=: \rho} = \rho (n(\lambda) - 1)$$

$$\text{Variation } \frac{dD}{d\lambda} = \rho \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

Unter *normaler Dispersion*⁴ versteht man, dass die Brechzahl n mit abnehmender Wellenlänge λ wächst, also $\frac{dn}{d\lambda} < 0$.

$$n(\text{rot}_{\lambda=800nm}) < n(\text{blau}_{\lambda=400nm})$$

⇒ unterschiedliche Lage der Bildebenen; verschiedene Bildgrößen

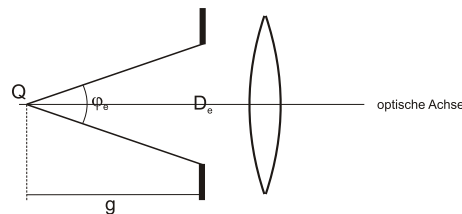
Zur Reduktion werden Sammell- und Zerstreuungslinsen kombiniert zu einem sogenannten Achromat, der die Änderung der Brechkraft zwischen zwei Wellenlängen aufheben oder zumindest minimieren soll (Linsen ρ_1 und ρ_2):

$$D = D_1 + D_2 \Delta D \quad = D_{\text{blau}} - D_{\text{rot}} = \rho_1 \underbrace{(n_{1,\text{blau}} - n_{1,\text{rot}})}_{=: \Delta n} + \rho_2 (n_{2,\text{blau}} - n_{2,\text{rot}}) = 0$$

wenn 1 die Sammellinse und 2 die Zerstreuungslinse bezeichnet, dann ist $\rho_1 > 0$, aber $\rho_2 < 0$.

3.10 Bildhelligkeit

Die Bildhelligkeit ist gegeben durch Blenden, Apertur des optischen Systems



- $\varphi_e \approx \frac{D_e}{g}$, mit Eintrittspupille D_e bzw. Eintrittswinkel φ_e
- Helligkeit $H \propto \frac{\varphi_e^2}{\bar{B}^2} \frac{\text{Sammlung}}{\text{Abbildung}}$
- Für ein abbildendes System und $g \gg f$ gilt $\bar{B}^2 \propto f^2$ (aus Vergrößerung V_T)

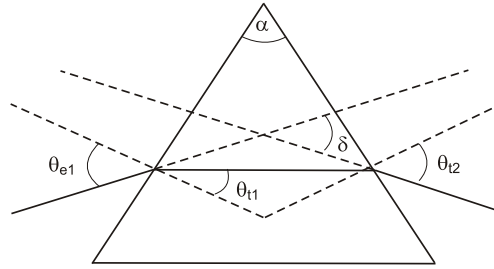
$$\Rightarrow H \propto \frac{D_e^2}{f^2}$$

- Photographie: *Blenden* oder *F-Zahl*
 $F := \frac{f}{D_e}$; $F = 1,4 \ 2 \ 2,8 \ 3,8 \ 5,6$ usw.
 Halbierung der Bildhelligkeit zu höherer *F-Zahl*

⁴ *anomale Dispersion* tritt unter anderem in Wellenlängenbereichen nahe einem resonanten Absorptionsmaximum auf

4 Optische Instrumente

4.1 Prisma



- aus dem Brechungsgesetz folgt für den Ablenkwinkel δ

$$\delta = \theta_{e1} - \alpha + \arcsin \left(\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_{e1}} - \sin \theta_{e1} \cos \alpha \right)$$

- Für symmetrische Durchstrahlung (d.h. $\theta_{e1} = \theta_{e2}$) wird δ minimal und $\delta_{min} = 2\theta_{e1} - \alpha$
- Bestimmung von n

$$n = \frac{\sin \left(\frac{\delta_{min} + \alpha}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}$$

- Anwendung Prisma

1. Zerlegung von weißem Licht in Spektralfarben ($\rightarrow n = n(\lambda)$)
2. Bestimmung von n (monochromatisches Licht)

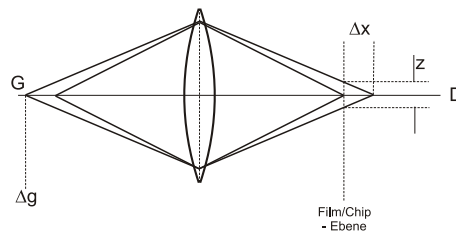
- Für kleine brechende Winkel mit $\alpha \cdot n \ll 1$ gilt:
(Brechung an einer Keilplatte)

$$\delta \approx -\alpha + 1(\alpha \cdot n - \theta)$$

$$\delta \approx (n - 1)\alpha$$

4.2 Kamera

- muss scharfes Bild liefern und richtige Helligkeit für den Film liefern
- Anforderung $g \approx [0,5]m \rightarrow \infty$, für typische Brennweite $f = [50]mm$ muss b um einige mm variabel sein
($\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$)
 \rightarrow Abstand Film - Linse verändert sich (Fokus)
- Tiefenschärfe: wegen endlicher räumlicher Auflösung des Films (Körnigkeit) sind endliche Ausdehnung des Lichtbündels nicht schlimm.



- Aus dem Strahlensatz folgt:

$$Z = \frac{D}{b} \cdot \Delta x$$

mit Durchmesser des Lichtbündels Z , Abstand Film - Linse b , Abstand Bild - Film Δx , Blendendurchmesser D .

- Maximale Auflösung in einer Dimension sei B_0 . (Film: Körnigkeit, Chip: Anzahl der Pixel pro Fläche)
- Schärfebereich Δg für den $Z \leq B_0$ gilt

$$\Delta g = \frac{\Delta x}{|V_L|} = \frac{b \cdot Z}{D \cdot |V_L|} \leq \frac{b \cdot B_0}{D \cdot |V_L|}$$

- relative Schärfentiefe $\frac{\Delta g}{g}$ nimmt zu mit $g, F, \frac{1}{f^2}$
- Film: $B_0 \approx [25]\mu m$ (Korngröße). z.B. für $F = 4, g = [5]m$ und $f = [5]cm \Rightarrow \Delta g \approx [1]m$

4.3 Das Auge

- "konventionelle Sehweite" $s_0 = 25cm$
- sehen entspannt möglich für $g = [25cm, \infty[$

4.4 Vergrößernde optische Instrumente

Die subjektiv Größe ist über den Sehwinkel $\epsilon = \frac{\text{Größe}}{\text{Abstand}}$ definiert.

Die Vergrößerung ist dabei:

1. Objekt in fixierter Entfernung (g fest, z.B. Mond, Sterne). Grenze: Auflösungsvermögen benachbarter Punkte

$$V := \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}} = \frac{\epsilon_I}{\epsilon_0}$$

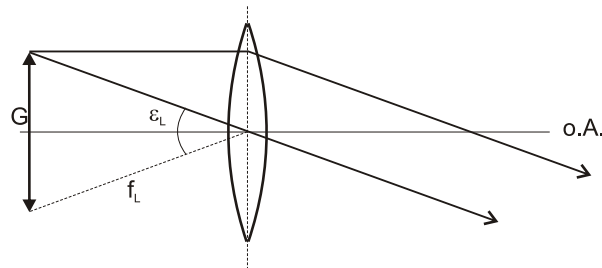
z.B. in der Astronomie

2. Gegenstandsweite g variabel. Grenze: Akkomodierfähigkeit des Auges

$$V := \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel im Abstand } s_0 = [25]cm} = \frac{\epsilon_I}{\epsilon_0}$$

4.4.1 Die Lupe (Sammellinse)

Die Lupe wird mit völlig entspanntem Auge betrachtet. \rightarrow Das Objekt G steht in Brennebene der Lupe, Strahlen treten parallel in das Auge ein.

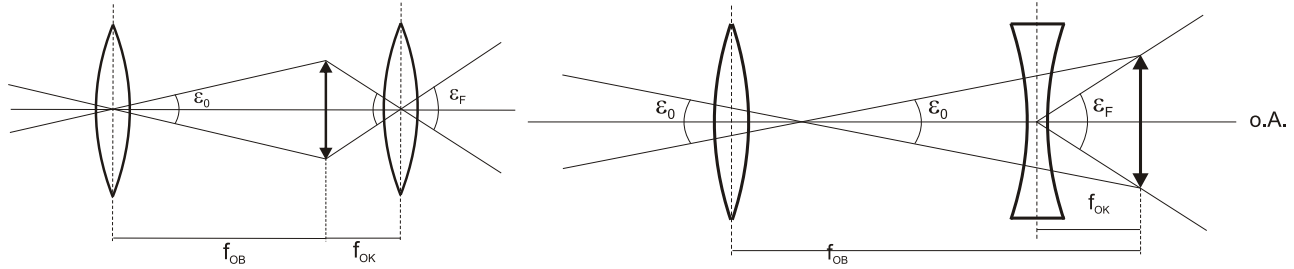


$$\epsilon_L = \frac{G}{f_L}, \epsilon_0 = \frac{G}{s_0} \text{ ohne Lupe}$$

$$\Rightarrow V_{Lupe} = \frac{\epsilon_L}{\epsilon_0} = \frac{s_0}{f_L} = \frac{[25]cm}{f_L} \text{ Vergrößerung einer Lupe}$$

4.4.2 Fernrohr

Ein Fernrohr wandelt ein Bündel paralleler Strahlen die unter Winkel ϵ_0 einfallen in Bündel mit ϵ_F um.



$$V_F = \frac{\epsilon_F}{\epsilon_0} = \frac{f_{Obj}}{|f_{Ok}|}$$

Desto größer Objektiv und desto kleiner Okularbrennweite desto höher ist die Vergrößerung. Unterschiede zwischen astronomischem (linkes Bild) und terrestrischem Fernrohr (rechtes Bild):

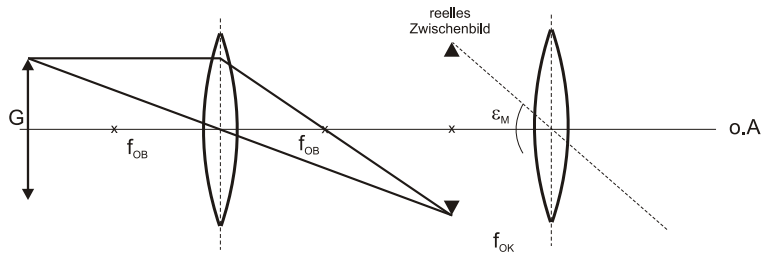
- Beim astronomischen Fernrohr wird ein reelles Zwischenbild betrachtet, das auf dem Kopf steht (für die Anwendung egal). Der Tubus ist lang ($f_{ob} + f_{ok}$)
- Beim terrestrischen Fernrohr is der Tubus kürzer ($\approx f_{ob} - f_{ok}$) und es wird das virtuelle Zwischenbild betrachtet, das richtig herum steht. Weil Brennweite negativ ist, wird der Betrag in der Formel gesetzt.

$$D_{aus} = \frac{D_{ein}}{V_F}$$

- \Rightarrow Fernrohre sind zur Strahlverengung geeignet.
- Intensität pro Fläche $\propto \left(\frac{D_{ein}}{D_{aus}}\right)^2 \propto V_F^2$
- Punktförmiger Gegenstand (z.B. ein Stern): Helligkeit steigt mit V_F^2 , während die Helligkeit flächenhaften Untergrunds konstant bleibt (wegen Flächenvergrößerung).
- Vorteil großer Öffnung D_{ein} ist nicht nur bessere Vergrößerung sondern auch Gewinn an Lichtstärke und Auflösungsvermögen ($\epsilon = \frac{1.22 \cdot \lambda}{D_{teixin}}$ ⁵)

4.4.3 Mikroskop

Ein Mikroskop besteht aus zwei Sammellinsen, deren Abstand größer als die Summe der Brennweiten ist.



$$|V_{ob}| = \frac{b}{g} = b \left(\frac{1}{f_{ob}} - \frac{1}{b} \right) = \frac{b - f_{ob}}{f_{ob}} = \frac{t}{f_{ob}}$$

mit der Tubuslänge $t = b - f_{ob}$.

Das Okular entspricht einer Lupe, und hat damit die Vergrößerung $V_{ok} = \frac{s_0}{f_{ok}}$ und damit hat das Mikroskop eine gesamte Vergrößerung von

$$V_M = V_{ob} \cdot V_{ok} = \frac{t \cdot s_0}{f_{ob} \cdot f_{ok}}$$

⁵1. Beugungsminimum, vgl. Wellentheorie