Ferienkurs Experimentalphysik 3 - Übungsaufgaben Wellen - Lösung

Matthias Brasse, Max v. Vopelius

23.02.2009

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $F(k)$ der Gauß-Dichte

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Hinweis: Betrachten Sie nicht die Fourier-Transformierte sondern ihre Ableitung

b) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte für die Funktion $f(t) = e^{\alpha|t|}$ mit $\alpha > 0$.

Lösung

a) Wie im Hinweis angegeben betrachten wir nicht die Fourier-Transformierte sondern ihre Ableitung:

$$\frac{d}{dk}F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ikx-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Ein gute Möglichkeit ist zu versuchen, das Argument als Ableitung nach der Integrationsvariablen darzustellen, also als $\int \frac{d}{dx} dx$, da damit die Integration wegfällt.

$$\frac{d}{dx} e^{-ikx-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = (-ik - \frac{x}{\sigma^2} e^{-ikx-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Den Faktor mit x erhalten wir indem der Faktor $i\sigma^2$ vor das Integral gezogen wird. Es fehlt das ik, das wird symmetrisch Addiert:

$$\frac{d}{dk}F(k) = \frac{i\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-x}{\sigma^2} - ik + ik \right) e^{-ikx-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Durch den Term mit $-ik$ haben wir genau die Ableitung nach x, das Integral mit dem $+ik$ gibt genau die Fouriertransformierte selbst (mit Vorfaktor):

$$= \frac{i\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} e^{-ikx-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx - k\sigma^2 F(k)$$

Die Integration fällt weg, die Grenzen eingesetzt gibt sowohl für ∞ als auch $-\infty$ 0, da x^2 der ausschlaggebende Term ist.

$$\frac{d}{dk}F(k) = -k\sigma^2 F(k)$$

$$F(k) = F(0) e^{\frac{k^2\sigma^2}{2}}$$

Dies ist wieder eine Gaußfunktion mit Varianz σ^{-2} statt σ^2 wie die ursprüngliche Funktion. Der Faktor $F(0)$ wird (vgl. Integraltabellen)

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sigma$$

b)

$$\begin{aligned}
F(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-iyt} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} dt e^{(\alpha - iy)t} + \int_{0}^{\infty} dt e^{(-iy-\alpha)t} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{1}{-(iy-\alpha)} e^{(\alpha-iy)t} \right]_{t=-\infty}^{t=0} + \left[\frac{1}{-(iy+\alpha)} e^{(-\alpha-iy)t} \right]_{t=-\infty}^{t=0} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{-iy+\alpha} + \frac{1}{iy+\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\alpha}{y^2+\alpha^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Eine Welle in der xy-Ebene werde beschrieben durch $z(x, y, t) = \cos(\omega t - k_x x - k_y y)$

a) Bestimmen Sie die Fortpflanzungsrichtung und die Phasengeschwindigkeit der Welle.

b) Die Welle wird an einer Wand $y = \text{const.}$ reflektiert. Einlaufende und reflektierte Welle überlagern sich zu einer resultierenden Welle
$s(x, y, t) = \cos(\omega t - k_x x - k_y y) + \cos(\omega t - k_x x + k_y y)$ Wie pflanzt sich diese Welle fort?

Lösung

a) Orte gleicher Phase findet man bei

$$\begin{aligned}
&\omega t - k_x x - k_y y = 0 \\
&t = 0 : -k_x x - k_y y = 0 \to y = -\underbrace{\frac{k_x}{k_y}}_{\text{„Steigung“}} x \\
&t = dt : \omega dt - k_x x - k_y y = 0 \to y = \frac{k_x}{k_y} x + \frac{\omega}{k_y} dt \\
&x = 0 : y_0 = \omega \frac{dt}{k_y} \\
&y = 0 : x_0 = \omega \frac{dt}{k_x} \\
&\sin\alpha = \frac{vdt}{\frac{\omega}{k_x} dt} \qquad \cos\alpha = \frac{vdt}{\frac{\omega}{k_y} dt} \\
&\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \to v = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}
\end{aligned}$$

Wer die Beziehung $v = \frac{\omega}{k}$ kennt, kann sich die Herleitung natürlich auch sparen.

b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}
\cos(\omega t - k_x x - k_y y) &= \cos(\omega t - k_x x)\cos(-k_y y) \\
&- \sin(\omega t - k_x x)\sin(-k_y y) \\
\cos(\omega t - k_x x - k_y y) &= \cos(\omega t - k_x x)\cos(k_y y) \\
&- \sin(\omega t - k_x x)\sin(k_y y)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow s(x,y,t) = 2\underbrace{\cos(\omega t - k_x x)}_{\text{fortlaufend}}\underbrace{\cos(k_y y)}_{\text{stehend}}$$

Aufgabe 3:

Eine harmonische elektromagnetische Welle werde beschrieben durch

$$\vec{E} = \vec{E_0}\cos(kx - \omega t)$$

Zeigen Sie, dass für die Intensität

$$I = \frac{c\epsilon_o}{2}E_0^2$$

gilt.

Lösung

$$\begin{aligned}
& \vec{E} = \vec{E_0}\cos(kx - \omega) \quad \vec{B} = \vec{B_0}\cos(kw - \omega t) \\
& I = <|\vec{S}|> \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) \\
\text{aus} \quad & \vec{\nabla}\times\vec{E} = \hat{k}\times\vec{E_0}\sin(kx - \omega t) = -\frac{\partial B}{\partial t} \\
\Rightarrow \quad & \vec{B} = \frac{1}{\omega}\hat{k}\times\vec{E}\ ,|E_0| = \omega|B_0| \\
& |\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0}|\left(\vec{E}\times|B\right)| = \frac{1}{\omega\mu_0}|E_0|^2\cos^2(kx - \omega t) \\
& \omega = c(\text{elektromagnetische Welle}) \ \ c^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} \\
& <\cos^2(kx - \omega t)> = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{1}{2}\left(1 + \cos(2kx - 2\omega t')\right)dt' \\
& = \frac{1}{2} - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T\omega}\left[\sin(2kx - 2\omega t')\right]_t^{t+T} = \frac{1}{2} \\
\Rightarrow I \quad & = <|\vec{S}|> = \frac{\epsilon_0 c}{2}|E_0|^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

Welche Brechzahl muss ein zylindrischer Stab mindestens haben, wenn alle in seine plane Grundfläche eintretenden Strahlen durch Totalreflexion weitergeleitet werden sollen?
Wie groß ist der maximale Eintrittswinkel bei $n = 1.33$? Welcher numerischen Apertur entspricht das?

Lösung

1. Brechung: $\sin\alpha = n\sin\beta$
2. Brechung: $n\sin\gamma = \sin\frac{\pi}{2} = 1 = n\cos\beta \quad (\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma)$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$
$\sin^2\alpha + 1 = n^2 \rightarrow \sin\alpha = \sqrt{n^2 - 1}$
Für alle Strahlen bedeutet $\alpha = 90\,°\rightarrow n > 1{,}41$
Für $n = 1{,}33 \rightarrow \alpha = 61{,}3\,°$
Numerische Apertur $n{\cdot}\sin\alpha$ bestimmt Auflösevermögen eines optischen Geräts. α ist der Winkel zwischen der optischen Achse und Randstrahl des Kegels, der noch eintreten kann.
Hier: $1 \cdot \sin\alpha = 0{,}877$

Aufgabe 5:

Beantworten Sie qualitativ folgende Fragen:

a) Warum ist der bayerische Himmel weiß-blau?

b) Warum ist das Himmelslicht teilweise polarisiert?

c) Warum ist die auf- oder untergehende Sonne rötlich gefärbt?

Lösung

a)
- Streuquerschnitt an Luftmolekülen hat Frequenz und damit Wellenlängenabhängigkeit (dipolsche Strahlungscharakteristik), $\propto \omega^4 \sin^2\theta$
- $\Rightarrow$ blaues Licht wird stärker gestreut als rotes in trockener Luft
- Streuung an Wassermolekülen folgt dieser Charakteristik nicht.
- $\Rightarrow$ keine stärkere Streuung des blauen Lichts

b)
- schwingt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
- regt nur senkrecht zur Ausbreitungsrichtung an
- $\Rightarrow$ ausgesendetes Licht hat keine Komponente in Einfallsrichtung
- Streulicht, dass unter Winkel $90\,°$ zum Sonnenlicht eintrifft hat lineare Polarisierung senkrecht zur Streuebene

c) Bei sehr schrägem Einfall wird Licht zum optisch dichteren Medium hingebeugt, rotes stärker als blaues. Dadurch wird die Sonne rot.

Aufgabe 6:

a) Zeigen Sie, dass bei einer ebenen Welle Rechts- und Linkszirkularpolarisation aufeinander senkrecht stehen, d.h. dass das Amplitudenprodukt $E_R \cdot E_L$ Null ergibt.

b) Wie lautet diejenige Welle, die zur elliptisch polarisierten Welle $E_R = (\hat{e_x} - ia\hat{e_y})e^{i(\omega t - kz)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ senkrecht polarisiert ist? Skizzieren Sie die Amplitudenprojektion in der xy-Ebene.

Lösung

a)

$$\begin{aligned}
\vec{E_r} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{e_x} + e^{-i\frac{\pi}{2}}\hat{e_y}\right) e^{i(\omega t - kz)} \rightarrow \vec{E_r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{e_x} - i\hat{e_y}\right) e^{i(\omega t - kz)} \\
\vec{E_l} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{e_x} + e^{i\frac{\pi}{2}}\hat{e_y}\right) e^{i(\omega t - kz)} \rightarrow \vec{E_r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{e_x} + i\hat{e_y}\right) e^{i(\omega t - kz)} \\
&\vec{E_r}\cdot\vec{E_l}^{\,*} = \frac{1}{2}(\hat{e_x} - i\hat{e_y})(\hat{e_x} - i\hat{e_y}) = \frac{1}{2}(\hat{e_x}^2 - 2i\hat{e_y}\hat{e_x} - \hat{e_y}^2) = 0
\end{aligned}$$

b) <u>Ansatz:</u> $E_R^* \cdot E_l = 0 \quad E_0\left(\hat{e_x} + ib\hat{e_y}\right)\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} e^{i(\omega t - kz)}$

$$\left(\hat{e_x} + ia\hat{e_y}\right)\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(\hat{e_x} + ib\hat{e_y}\right)\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} = 0$$

$$= 1 - ab \quad \Rightarrow b = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \vec{E_L} = \frac{a\hat{e_x} + i\hat{e_y}}{\sqrt{1+a^2}} e^{i(\omega t - kz)}$$

Aufgabe 7:

Ein Plättchen der Dicke d_x habe für $\hat{x}$-polarisierte Strahlung den Brechungsindex $n_x = 1 - \frac{a}{\omega - \omega_0 + \Delta}$ und für $\hat{y}$-polarisierte Strahlung den Brechungsindex $n_y = 1 - \frac{a}{\omega - \omega_0 - \Delta}$

a) Skizzieren Sie den Verlauf des Brechungsindex.

b) Strahlung der Kreisfrequenz $\omega_0 + \delta$, die beim Einfall linear mit dem Winkel 45 ° zu den x- und y-Achsen polarisiert ist, verlässt die Platte nach senkrechtem Durchgang rechtszirkular (linkszirkular) polarisiert. Bestimmen Sie die möglichen Werte von δ und tragen Sie diese in die Skizze ein.

Lösung

$$n_x = 1 - \frac{\alpha}{\omega - \omega_0 + \Delta} \quad n_y = 1 - \frac{\alpha}{\omega - \omega_0 - \Delta}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \hat{e_x} e^{i(\omega t - k n_x z)} + \hat{e_y} e^{i(\omega t - k n_y z)} \\
\Delta\phi_{y-x} &= -kdn_y - (-kdn_x) = kd(n_x - n_y) \\
&= kd\left(\frac{\alpha}{\omega - \omega_0 + \Delta} - \frac{\alpha}{\omega - \omega_0 - \Delta}\right) \quad \omega = \omega_0 + \delta \\
&= kd\left(\frac{\alpha}{\delta + \Delta} - \frac{\alpha}{\delta - \Delta}\right) = \frac{kd\alpha \cdot 2\Delta}{\delta^2 + \Delta^2} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi n & \text{rechtszirk.} \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n & \text{linkszirk.} \end{cases} \\
\Rightarrow \delta &= \pm\sqrt{\Delta^2 + \frac{\alpha \cdot 2\Delta}{(2n \mp 1/2)\pi}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8:

Zeigen Sie, ausgehend von der Stetigkeit der Tangentialkomponente von H an der Grenzfläche zweier Dielektrika, dass H bei der Reflexion einer senkrecht einfallenden elektromagnetischen Welle am dünnen Medium einen Phasensprung um π erleidet.

Lösung

$$
\begin{aligned}
&\vec{E} = \vec{E_0} e^{e(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \\
&\vec{B} = \vec{B_0} e^{e(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \\
&\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow \vec{k} \times \vec{E_0} = \omega_0 \vec{B} \text{vgl. Aufgabe 3} \\
&div \epsilon \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E_0} = 0 \\
&div \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B_0} = 0 \\
\Rightarrow \quad &\vec{k}, \vec{E}, \vec{B} \text{ bilden rechtssystem} \\
&\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H} \\
&E = vB = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} B = \frac{\sqrt{\mu_0 \mu}}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0}} H \\
&|\vec{S}| = EH = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} H^2 = \frac{1}{\epsilon_0 c n} H^2 \\
\text{mit} \quad &c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}
\end{aligned}
$$

Stetigkeit der Tangentialkomponente von H bedeutet:

$$
\begin{aligned}
H_i + H_r &= H_t \\
S_i - S_r &= S_t \\
\frac{H_i^2}{n_i} - \frac{H_r^2}{n_i} &= \frac{H_t^2}{n_t} \text{(gleiches Medium einlaufend + reflektiert)} \\
\frac{H_i^2 - H_r^2}{n_i} &= \frac{(H_i + H_r)^2}{n_t} \\
\frac{H_i - H_r}{n_i} &= \frac{H_i + H_r}{n_t}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \frac{H_r}{H_t} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}$$

Für $n_t > n_i$ (Refl. am dichteren Medium gibt es keinen Phasensprung, aber für $n_t < n_i$ schon, und zwar um π.

Aufgabe 9:

Eine transversale elektromagnetische Welle im Vakuum sei zirkular polarisiert,

$$\vec{E} = E_0 \left[\cos(kz - \omega t)\hat{e}_x + \sin(kz - \omega t)\hat{e}_y\right]$$

und breite sich in z -Richtung aus. Berechnen Sie für diese Welle:

a) die magnetische Induktion $\vec{B}(r,t)$

b) den Poynting-Vektor $\vec{S}(r,t)$

c) den Strahlungsdruck auf eine um den Winkel Θ gegen die Ausbreitungsrichtung ($\vec{k} = k\hat{e}_z$) geneigte, total absorbierende Ebene.

Lösung

a)

$$rot\vec{E} \;=\; E_0 \begin{pmatrix} -k\cos(kz-\omega t) \\ -k\sin(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -k\vec{E} = \dot{\vec{B}}$$

Integration nach t liefert $\vec{B}$:

$$\vec{B} = E_0 \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -k\sin(kz-\omega t) \\ k\cos(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{l} \times \vec{E}\right)$$

b)

$$\begin{aligned}
\vec{S}(\vec{r},t) &= \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{1}{\mu_0}\vec{B} = \\
&= \frac{kE_0^2}{\mu_0\omega} \begin{pmatrix} \cos(kz-\omega t) \\ \sin(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(kz-\omega t) \\ \cos(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{kE_0^2}{\mu_0\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2(kz-\omega t) + \sin^2(kz-\omega t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{kE_0^2}{\mu_0\omega}\hat{e_z} = \text{const.}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Energiestromdichte einer zirkular polarisierten Welle oszilliert nicht.

c) Strahlungsdruck

- Betrachte Fläche deren Normale den Winkel θ mit der Ausbreitungsrichtung der Welle einschließt.

Feldimpulsdichte $\pi(\vec{r},t) = \vec{D} \times \vec{B} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{S}$ mit $c^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}$
Alle Wellenfronten in Zylinder $dV = cdt\cos\theta dA$ erreichen in Zeit dt das Flächenelement dA.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{Feldimpuls}\vec{p} = \pi dV &= \frac{1}{c^2}\vec{S} dA_{\text{senkr.}} cdt \\
&= \epsilon_0 E_0^2 dA \cos\theta dt \hat{e_z}
\end{aligned}$$

Die Ebene sei vollständig absorbierend, das heißt der Strahlungsdruck

$$P_S = \frac{d\vec{F}\cdot\vec{n}}{dA}\text{Normalkomponente der Kraft pro Fläche}$$

$$\begin{aligned}
d\vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 \cos\theta dA \hat{e_z} \\
\Rightarrow & \quad \underline{\epsilon_0 E_0^2 \cos^2\theta}
\end{aligned}$$