

# Ferienkurs Experimentalphysik III - Optik

Max v. Vopelius, Matthias Brasse

23.02.09

## Inhaltsverzeichnis

|  |          |
|--|----------|
| <b>1 Wellen</b>  | <b>1</b> |
| 1.1 Allgemeines zu Wellen . . . . .                              | 1        |
| 1.1.1 Wellengleichung für dispersionsfreie Wellen . . . . .      | 1        |
| 1.1.2 Die Gruppengeschwindigkeit . . . . .                       | 1        |
| 1.2 Elektromagnetische Wellen . . . . .                          | 1        |
| 1.2.1 Energie und Impuls von Licht . . . . .                     | 2        |
| 1.2.2 Wellenpakete, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit . . . . . | 3        |
| 1.2.3 Dispersion des Lichtes . . . . .                           | 4        |
| 1.2.4 Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen . . . . .        | 4        |
| 1.3 Polarisation von EM-Wellen . . . . .                         | 7        |

## 1 Wellen

### 1.1 Allgemeines zu Wellen

#### 1.1.1 Wellengleichung für dispersionsfreie Wellen

Die allgemeine Wellengleichung für Medien, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen nicht von ihrer Frequenz abhängt, lautet:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (1)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Welle deren Form sich bei der Ausbreitung nicht ändert. Eine spezielle Lösung der Gleichung ist die einfache harmonische Welle

$$f(x, t) = A \exp [i(kx - \omega t)] \quad (2)$$

die hier in komplexer Form gegeben ist mit der Wellenzahl  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi\nu$  und der Wellenlänge  $\lambda$ . Das Argument der komplexen e-Funktion  $\Phi = (kx - \omega t)$  ist die Phase der Welle. Die Geschwindigkeit der Welle ist gegeben durch

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} \quad (3)$$

Dies ist die Phasengeschwindigkeit.

#### 1.1.2 Die Gruppengeschwindigkeit

Im Gegensatz dazu gibt es auch Medien, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Frequenz der Welle abhängt. In diesen sogenannten dispersionsbehafteten Medium breiten sich Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen mit einer unterschiedlichen Geschwindigkeit aus. Somit kann sich die Form eines Wellenpakets ändern. Wellenpakete sind Überlagerung vieler einzelner Wellen um eine zentrale Frequenz  $\omega_0$  und Wellenzahl  $k_0$ . Betrachtet man das Maximum dieses Wellenpakets, so bewegt sich dieses mit der Gruppengeschwindigkeit. Diese ist gegeben durch

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \quad (4)$$

Die Gruppengeschwindigkeit entspricht der Geschwindigkeit des Energietransports der Welle.

## 1.2 Elektromagnetische Wellen

In der Optik beschäftigen wir uns vorwiegend mit elektromagnetischen (EM) Wellen. Grundlage zur Verständnis des Elektromagnetismus und dessen Wellenverhalten sind die Maxwellgleichungen. Im linearen, isotropen Medium ohne Ladungs- und Stromdichte lauten diese

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

Aus diesen folgen die Wellengleichungen für das  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Feld der EM Wellen

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (6)$$

Vergleicht man diese Wellengleichungen mit Gleichung (1), so findet man sofort, dass die Phasengeschwindigkeit einer EM Welle gegeben ist durch

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} c \quad (7)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . Die magnetische Permeabilität  $\mu$  nimmt in optisch relevanten Medien immer den Wert 1 an. Anders verhält es sich mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$ . Ist  $\epsilon$  ein Skalar, spricht man von isotropen Medien. In der Realität hat man es meistens mit optisch anisotropen Medien zu tun. In diesem Fall ist  $\epsilon$  ein Tensor. Der Brechungsindex  $n$  eines Mediums ist definiert als das Verhältnis von der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zur Lichtgeschwindigkeit im Medium.

$$n = \frac{c}{v_{ph}} = \sqrt{\epsilon} \quad (8)$$

Normalerweise ist die Dielektrizitätskonstante und damit der Brechungsindex eine Funktion der Frequenz bzw. der Wellenlänge. Diese Eigenschaft haben wir in schon kennengelernt und heißt Dispersion. Im Vakuum nimmt der Brechungsindex  $n$  den Wert eins an. Eine spezielle Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung ist wie oben die ebenen harmonische Welle mit

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (9)$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Wellengleichung ein, so erhält man die Dispersionsrelation für ebene EM Wellen.

$$\mathbf{k}^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2 \quad (10)$$

Man sieht, dass in nicht-dispersiven Medien, spricht wenn  $n$  keine Funktion von  $k$  bzw.  $\lambda$  ist, eine lineare Dispersion  $\omega = c|k|$  vorliegt.

Setzt man den Ausdruck für eine ebene EM Welle (vgl. Gl. 9) in die Maxwellgleichungen ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{B}$  in jedem Fall senkrecht aufeinander stehen und ein rechtshändiges System bilden. Ist das Medium zusätzlich noch isotrop, folgt dass  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ . Daher sind EM Wellen transversale Wellen.

### 1.2.1 Energie und Impuls von Licht

EM Wellen transportieren Energie. Der Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$  beschreibt die Energiestromdichte.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \epsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (11)$$

Die Intensität des Licht erhält man durch zeitliche Mittelung über den Poynting Vektor, also  $I = \langle |S| \rangle$ .

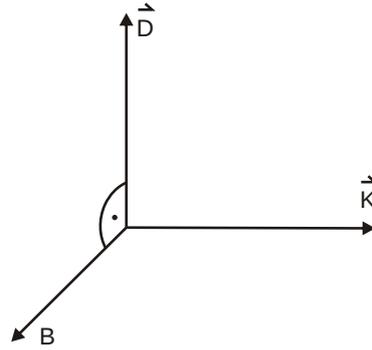


Abbildung 1: EM Wellen sind transversale Wellen [1]

### 1.2.2 Wellenpakete, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Wellenpakete haben wir schon kennengelernt als Superposition vieler Einzelwellen. Ein EM Wellenpaket ist genauso eine Überlagerung einzelner Teilwellen. Sind die Teilwellen Lösungen der Wellengleichung, so löst auch das Wellenpaket die Wellengleichung, da diese linear ist. Wellenpakete sind wichtig, da das Licht das wir beobachten nicht nur eine Einzelwelle ist, sondern normalerweise ein Lichtpuls, sprich ein Wellenpaket ist. Der mathematische Formalismus zur Konstruktion von Wellenpaketen ist die Fourier-Transformation.

$$\underbrace{\mathbf{E}(t)}_{\text{Zeitraum}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \underbrace{\mathbf{E}_0(\omega)}_{\text{Frequenzraum}} \exp(i\omega t) d\omega \quad (12)$$

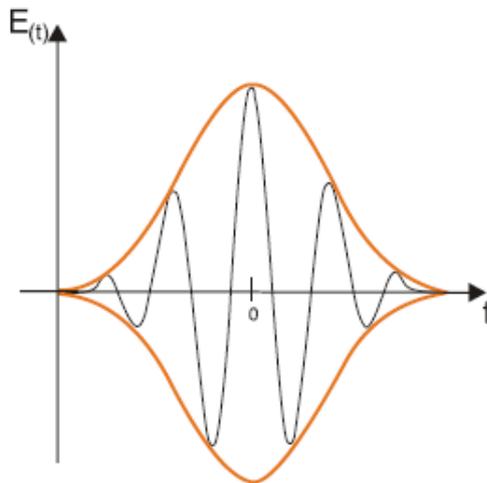


Abbildung 2: Wellenpaket [1]

Im Fall von Wellenpaketen muss man zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Wellenpakets und der Ausbreitungsgeschwindigkeit der einzelnen Teilwellen unterscheiden. Ersteres, also das Maximum der Einhüllenden des Pakets, bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_{gr}$  fort, wohingegen die einzelnen Phasen wiederum sich mit der Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$  bewegen. Es gilt

$$v_{gr} = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} \quad (13)$$

$$v_{ph} = \frac{c}{n} \quad (14)$$

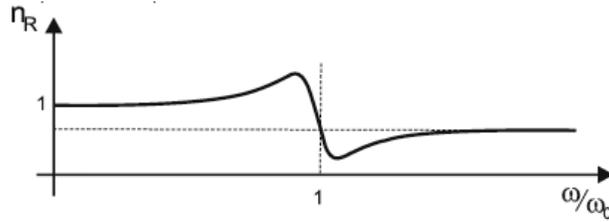


Abbildung 3: Realteil des Brechungsindex [1]

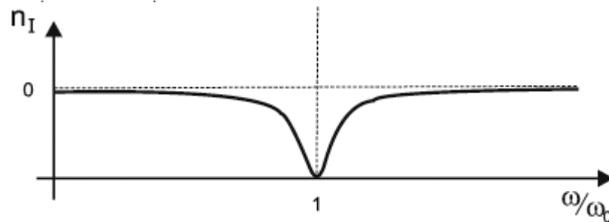


Abbildung 4: Imaginärteil des Brechungsindex [1]

In nicht-dispersiven Medien, z.B. in Vakuum, ist die Gruppengeschwindigkeit gleich der Phasengeschwindigkeit. Da gewöhnlich Medien dispersiv sind, ist dies i. A. nicht der Fall.

### 1.2.3 Dispersion des Lichtes

Wir haben schon kennengelernt, dass Dispersion bedeutet, dass die Dielektrizitätskonstante und damit auch der Brechungsindex von der Frequenz der EM Welle abhängt. Die Ausbreitung der Welle im Medium wird dann im wesentlichen von  $n(\omega)$  bestimmt. Daher hat man ein Modell entwickelt, um die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Frequenz zu bestimmen. In diesem klassischen Modell nimmt man an, dass das Elektron an einen viel schwereren Atomkern gebunden ist und eine gedämpfte harmonische Schwingungen ausführt. Löst man die zugehörige Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E_0 \exp(i\omega t)$$

so erhält man den realen und den komplexen Anteil des Brechungsindex für dünne Medien (z.B. Gase) zu:

$$n_R = 1 + \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$n_I = 1 + \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m_e} \frac{-\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

Den Bereich mit  $\frac{dn_R}{d\omega} > 1$  nennt man den Bereich normaler Dispersion. Auf der anderen Seite spricht man bei  $\frac{dn_R}{d\omega} < 1$  von anomaler Dispersion. In diesem Fall ist der Imaginärteil um die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  herum sehr groß und kann nicht mehr vernachlässigt werden. Ein negativer Imaginärteil bedeutet, dass Licht im Medium absorbiert wird. Die Absorption ist am stärksten im Bereich der Resonanzfrequenz.

### 1.2.4 Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

Grundlage zur Beschreibung von Reflexion und Brechung von EM Wellen an Grenzflächen sind wiederum die Maxwellgleichungen. Aus diesen gehen die Randbedingungen hervor, die Wellen an Grenzflächen zwischen zwei Medien erfüllen müssen. Die Tangentialkomponente von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  sind stetig sowie

auch die Normalkomponenten von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{E}$ . Mit Hilfe dieser Randbedingungen kann man die Gesetze für Brechung und Reflexion einer monochromatischen ebenen Welle an einer Grenzfläche formulieren.

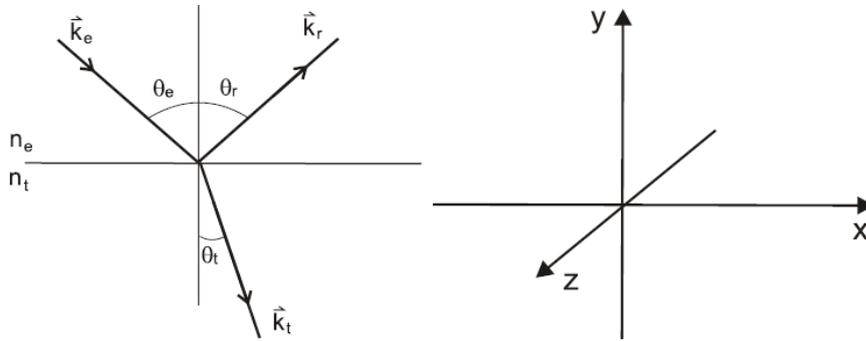
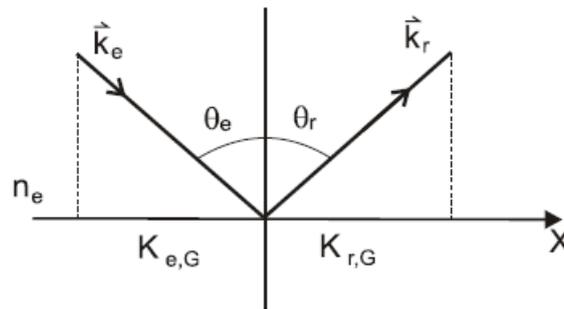


Abbildung 5: Ebene Welle trifft unter Winkel  $\theta$  auf die Grenzfläche [1]

- Reflexionsgesetz

Das Reflexionsgesetz besagt, der Wellenvektor des reflektierten Lichts in der Einfallsebene liegt. Ferner ist der Einfallswinkel gleich dem Ausfallwinkel  $\theta_e = \theta_r$



- Brechungsgesetz von Snellius

$$\frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_t} = \frac{n_t}{n_e} \tag{15}$$

Auch beim transmittierten Licht liegt der Wellenvektor in der Einfallsebene. Für  $n_t > n_e$  wird der Strahl zum Lot hin gebrochen. Im umgekehrten Fall wird das Licht vom Lot weg gebrochen.

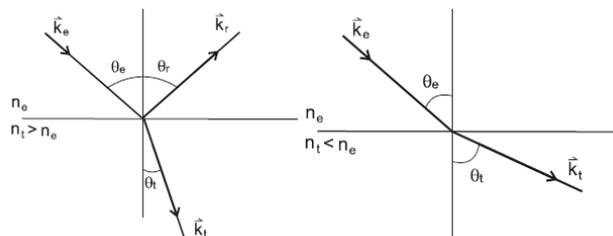


Abbildung 6: Transmission nach dem Brechungsgesetz von Snellius [1]

Nun betrachten wir die Intensität des reflektierten bzw. transmittierten Strahls. Der einfachste Fall ist, wenn die Welle senkrecht auf die Grenzfläche auftrifft. Es lässt sich zeigen, dass

$$\mathbf{E}_{r0} = \underbrace{\left( \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} \right)}_{\text{Reflexionskoeffizient}} \cdot \mathbf{E}_{e0} = r \cdot \mathbf{E}_{e0}$$

Man erhält den als Reflexionsgrad als Quadrat des Reflexionskoeffizienten zu

$$R = \frac{I_r}{I_e} = r^2 = \left( \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} \right)^2$$

wobei  $n$  der komplexe Brechungsindex ist. Analysiert man den Reflexionskoeffizienten  $r$ , so sind für  $r > 0$   $\mathbf{E}_{r0}$  und  $\mathbf{E}_{e0}$  in Phase. Für  $r < 0$ , also  $n_e < n_t$  schwingen  $\mathbf{E}_{r0}$  und  $\mathbf{E}_{e0}$  antiparallel an der Grenzfläche, somit findet ein Phasensprung um  $\pi$  statt. Generell findet bei Reflexion an einer Grenzfläche beim Übergang vom optisch dünneren Medium zum optisch dickeren Medium ein Phasensprung von  $\pi$  statt. Im allgemeinen Fall können die Intensitäten des reflektierten und transmittierten Strahls mithilfe der Fresnel Formeln gewonnen werden. Man spaltet die Felder in Komponenten  $\perp$  und  $\parallel$  zur Einfallsebene auf und geht mit diesem Ansatz in die Stetigkeitsbedingungen ein. So erhält man als Lösung die Fresnel-Gleichungen

$$r_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{e\perp}} = -\frac{\sin(\theta_e - \theta_t)}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \quad (16)$$

$$r_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{e\parallel}} = -\frac{\tan(\theta_e - \theta_t)}{\tan(\theta_e + \theta_t)} \quad (17)$$

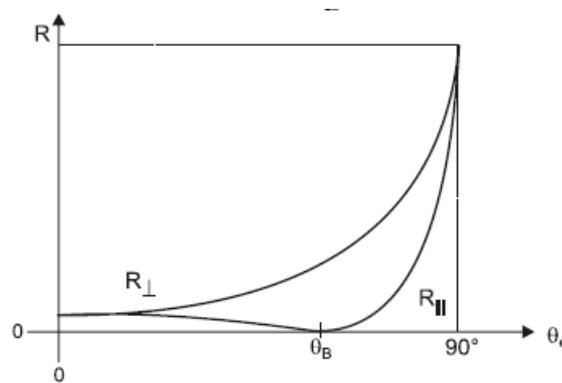


Abbildung 7: Reflexionskoeffizient [1]

Zwei wichtige Spezialfälle sollte man beachten.

- Brewsterwinkel

Trifft der Strahl im Brewster-Winkel  $\theta_B$  auf die Grenzfläche, ist der Reflexionskoeffizient für die parallele Komponente Null, d.h. das reflektierte Licht ist vollständig senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Außerdem stehen der gebrochene und der reflektierte Strahl senkrecht aufeinander. Der Brewster-Winkel ergibt sich zu

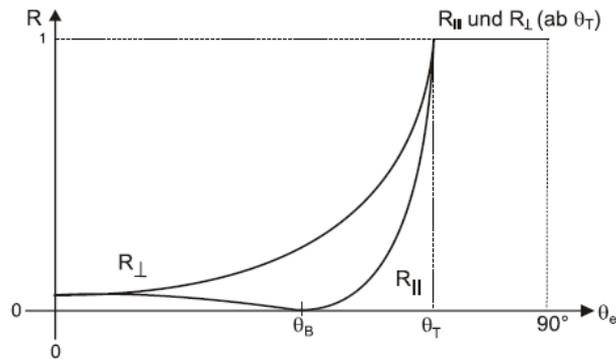
$$\tan \theta_B = \frac{n_t}{n_e} \quad (18)$$

- Totalreflexion

Im Falle von  $n_e > n_t$  findet gibt es einen Winkel der Totalreflexion  $\theta_T$ , d.h. für diesen oder

größere Einfallswinkel findet hundertprozentige Reflexion statt. Der Winkel der Totalreflexion folgt aus dem Snelliusgesetz und ist gegeben durch

$$\theta_T = \arcsin\left(\frac{n_t}{n_e}\right) \quad (19)$$



Totalreflexion spielt eine wichtige Rolle in vielen technischen Anwendungen. Beispiele sind Lichtleiter aus Glasfasern, die aus einem Kern von optisch dichten Material und einem Mantel aus optisch dünnem Material bestehen und somit Totalreflexion bis zu gewissen Einstrahlwinkeln ermöglichen. Andere Beispiele sind Strahlteiler, Prismen etc..

### 1.3 Polarisation von EM-Wellen

Wir haben schon anhand der Maxwell-Gleichungen festgestellt, dass EM-Wellen transversale Wellen sind. Man kann aber zwischen unterschiedlichen Polarisationszuständen der Wellen unterscheiden. Betrachten wir eine EM-Welle mit

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

dann hat man

- linear polarisiertes Licht, wenn  $E_x$  und  $E_y$  in Phase sind, z. B.

$$\mathbf{E}(t) = \begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \end{pmatrix} \cdot \exp[i(k \cdot z - \omega \cdot t)]$$

$$E_{x0} = \text{const}$$

$$E_{y0} = \text{const}$$

- zirkular polarisiertes Licht, wenn gilt:

$$|E_x| = |E_y|$$

Zusätzlich muss ein Phasenunterschied der beiden Polarisationsrichtungen vorliegen, der genau  $\pm \frac{\pi}{2} + 2 \cdot m \cdot \pi$  sein muss:

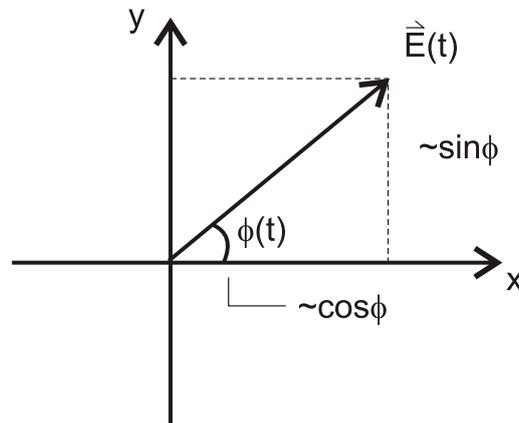
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t) &= E_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(k \cdot z - \omega \cdot t) \\ \cos(k \cdot z - \omega \cdot t + \phi) \end{pmatrix} \\ &= E_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(k \cdot z - \omega \cdot t) \\ \pm \sin(k \cdot z - \omega \cdot t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{rechtszirkular: } \phi = -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot m \cdot \pi$$

$$\text{linkszirkular: } \phi = +\frac{\pi}{2} + 2 \cdot m \cdot \pi$$

$$m \in \mathbb{N}_0$$

Man spricht von rechtszirkularem Licht, wenn  $\mathbf{E}$  sich beim Blick auf die Quelle im Uhrzeigersinn dreht.



**Abbildung 8:** zirkular polarisiertes Licht [1]

Zirkular polarisiertes Licht kann als Summe zweier senkrecht zueinander linear polarisierten Wellen beschrieben. Auch umgekehrt ist linear pol. Licht eine Superposition aus rechts- und links zirkularem Licht.

- Für eine andere Phasen- und Amplitudenverhältnisse als obige liegt elliptisch polarisiertes Licht vor.

In der Realität hat man es meistens mit unpolarisiertem Licht zu tun. Aber es gibt verschiedenen Möglichkeiten, Licht zu polarisieren.

- Durch die Verwendung von Polarisatoren erhält man linear polarisiertes Licht.

Um die Intensität nach Durchgang durch den Analysator zu berechnen, spaltet man das linear polarisierte Licht in einen Anteil parallel und senkrecht zur Durchlassrichtung des Analysators auf.

$$\mathbf{E}_0 = \underbrace{\mathbf{E}_{0\parallel}}_{\text{parallel}} + \underbrace{\mathbf{E}_{0\perp}}_{\text{senkrecht zum Analysator}}$$

Ist der Analysator um einen Winkel  $\theta$  verkippt, so erhält man als Intensität hinter dem Analysator (vgl. Fig. ??):

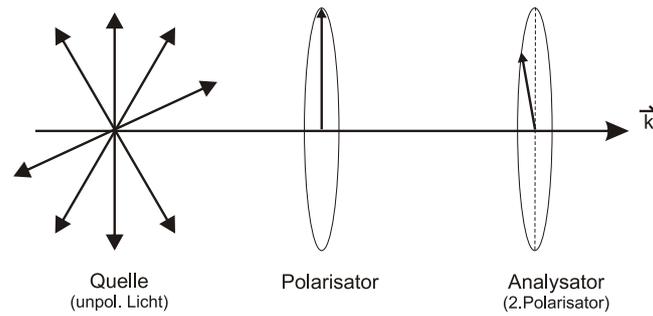
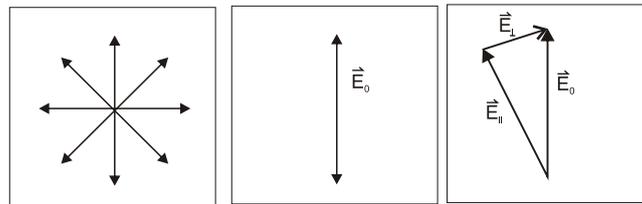


Abbildung 9: Polarisation von Licht und Bestimmung der Polarisation mit Analysator [1]

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \cdot \vec{e}_{\parallel} \cdot \cos \theta + E_0 \cdot \vec{e}_{\perp} \cdot \sin \theta$$

$$\Rightarrow I(\theta) = I_0 \cdot \cos^2 \theta$$



- Eine andere Möglichkeit Licht zu polarisieren ist durch Reflexion an einer Grenzfläche unter dem Brewster-Winkel. Das reflektierte Licht ist vollständig senkrecht zur Einfallsebene polarisiert.
- Durch asymmetrische Moleküle kann die Transmission und Reflexion abhängig von der Polarisationsrichtung werden. Dies ist der Fall bei der Doppelbrechung, die wir später behandeln

## Literatur

- [1] Vorlesungsskript Prof. Oberauer, TUM, WS 2008/09
- [2] Vorlesungsskript Prof. Gross, TUM, WS 2002/03
- [3] Zinth, Körner, *Physik III*, Oldenbourg Verlag
- [4] Demtröder, *Experimentalphysik III*