Experimentalphysik II

Musterlösung Übungsklausur 2

27. 02. 2009

Aufgabe 1 (7 Punkte)
Sauerstoff: $\gamma = 1,4 = \frac{C_p}{C_V}$
a) ΔV sei das Volumen, das Δn Teilchen im Tank mit p_1 einnehmen.
Adiabatischer Prozess: $dQ = 0 \Rightarrow dU = dW = -pdV$

$$\begin{aligned}
&(1)\ \Delta W = p_1 \Delta V = (n+\Delta n) C_V (T_1 - T_0) = (n+\Delta n) C_V \Delta T = dU \\
&(2)\ \text{Zustandsgleichung für ideale Gase: } p_1 \Delta V = \Delta n R T_0 \\
&(1) = (2)\ \Rightarrow (n+\Delta n) C_V (T_1 - T_0) = \Delta n R T_0
\end{aligned}$$

mit $R = C_p - C_V \Rightarrow \frac{R}{C_V} = \gamma - 1$ folgt:

$$\frac{n+\Delta n}{\Delta n} = \frac{T_0}{T_1 - T_0}(\gamma - 1) \Rightarrow \frac{\Delta n}{n} = \frac{T_1 - T_0}{T_0 \gamma - T_1}$$

b) Vor Befüllen: $p_0 V_0 = n R T_0$
Nach Befüllen: $p_1 V_0 = (n + \Delta n) R T_1$

$$\Rightarrow \frac{\Delta n}{n} = \frac{p_1 T_0}{p_0 T_1} - 1$$

c) Das Volumen V bleibt konstant, ebenso die Gasmenge $\tilde{n}$. Der Prozess ist also isochor.
Mit $T_2 = T_0$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} \text{vor Abkühlung: } T_1 R \tilde{n} &= p_1 V \\ \text{nach Abkühlung: } T_2 R \tilde{n} &= p_2 V \end{aligned}\right\} \frac{T_1}{p_1} = \frac{T_0}{p_2}$$

Um T_1 zu eliminieren, verwenden wir als zweite Bestimmungsgleichung die Ergebnisse aus a) und b), die wir gleichsetzen:

$$\frac{T_1 - T_0}{T_0\gamma - T_1} = \frac{p_1 T_0}{p_0 T_1} - 1$$
$$(T_1 - T_0)p_0 T_1 = (p_1 T_0 - p_0 T_1)(T_0\gamma - T_1)$$
$$p_0 T_1^2 - T_0 p_0 T_1 = p_1 T_0^2 \gamma - p_1 T_0 T_1 - p_0 T_1 \gamma T_0 + p_0 T_1^2$$
$$-p_0 = \gamma p_1 \frac{T_0}{T_1} - p_1 - \gamma p_0 = \gamma p_2 - p_1 - \gamma p_0$$
$$\Rightarrow p_2 = (p_0(\gamma - 1) + p_1)\frac{1}{\gamma} = 107,4 \text{ bar}$$

d)

$$T_1 = \frac{T_0}{p_2} p_1 = 409K$$
$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{p_1 T_0}{p_0 T_1} - 1 = 106,4$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Die Stromdichte am Ort $\vec{x}$ der rotierenden Kugel ist $\vec{j}(\vec{x}) = \rho\vec{v}(\vec{x})$ wobei ρ die räumlich konstante Ladungsdichte $\rho = 3Q/4\pi R^3$ ist, und die Geschwindigkeit am Ort $\vec{x}$ gegeben ist durch $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\omega} \times \vec{x}$.
Also ist das magnetische Moment der Kugel

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2}\rho \int d^3x \vec{x} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) = \frac{1}{2}\rho \int d^3x \vec{\omega}(\vec{x} \cdot \vec{x}) - \frac{1}{2}\rho \int d^3x (\vec{\omega} \cdot \vec{x})\vec{x}$$

Das erste Integral ist leicht zu berechnen, da man den konstanten Vektor $\vec{\omega}$ herausziehen kann:

$$\int d^3x \vec{\omega}(\vec{x} \cdot \vec{x}) = \vec{\omega} \int d^3x r^2 = \int_0^R dr 4\pi r^2 r^2 = \frac{4\pi}{5} R^5 \vec{\omega}$$

Um das zweite Integral zu berechnen, nehmen wir an dass $\vec{\omega}$ in z-Richtung zeigt, also $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z$ und führen Kugelkoordinaten ein. Dann ist

$$\int d^3x (\vec{\omega} \cdot \vec{x})\vec{x} = \omega \int d^3x z \vec{x} = \omega \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin\theta r \cos\theta \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}$$

Hier erkennt man sofort, dass die x- und y-Komponenten die Integration über ϕ nicht überleben, da sie linear in sin ϕ bzw. cos ϕ sind. Es bleibt also die z-Komponente des Integrals:

$$\omega \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^4 \sin\theta \cos^2\theta = 2\pi\omega \int_0^R dr r^4 [-\frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^\pi = \frac{4\pi}{15}\omega R^5$$

Damit also:

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2}\rho\frac{4\pi}{5}R^5\vec{\omega} - \frac{1}{2}\rho\frac{4\pi}{15}\vec{\omega}R^5$$

Mit $\rho = 3Q/4\pi R^3$ ergibt sich

$$\vec{p}_m = \frac{1}{5}QR^2\vec{\omega}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Die Zeichnung zeigt die Ströme in den verschiedenen Maschen. Nach der Kirchhoffschen Maschenregel:

$$\begin{aligned} V_3 &= [2(i_3 - i_2) + 2(i_3 - i_4)]R \\ V_2 - V_3 &= [2(i_2 - i_1) + (i_2 - i_4) + 2(i_2 - i_3)]R \\ V_1 - V_2 &= [2i_1 + (i_1 - i_4) + 2(i_1 - i_2)]R \\ 0 &= 2(i_4 - i_3) + (i_4 - i_2) + (i_4 - i_1) + 2i_4 \end{aligned}$$

Zudem ist $V_{out} = 2i_4R$. Auflösen des obigen Gleichungssystems nach i_4 und Einsetzen in die Gleichung für V_{out} liefert

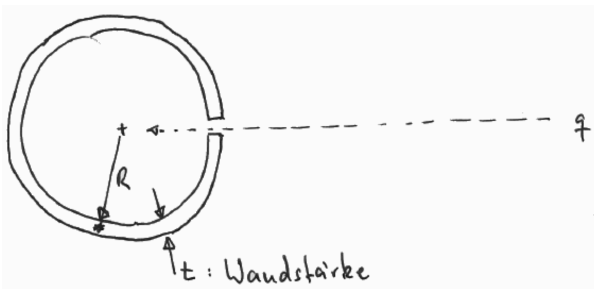
$$V_{out} = \frac{V_1}{3} + \frac{V_2}{6} + \frac{V_3}{12}$$

b)

V_1	0	0	0	0	1	1	1	1
V_2	0	0	1	1	0	0	1	1
V_3	0	1	0	1	0	1	0	1
V_4	0	1/12	2/12	3/12	4/12	5/12	6/12	7/12

c) Digital-Analog-Wandler.

Aufgabe 4 (5 Punkte)



Elektrisches Feld einer Punktladung: $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$
mit der Energie $W = \int_\infty$
Verschieben der Ladung führt zu Ladungsverschiebung auf der Metallkugel - der Bereich

im Inneren der Schale ist feldfrei!
Dies reduziert die Feldenergie der Ladung, wobei die Differenz der verrichteten Arbeit entspricht (Integration in Kugelkoordinaten):

$$-\Delta W = \int_R^{R+t} \frac{\varepsilon_0}{2}(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2})^2 4\pi r^2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+t})$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)
a) Die Berechnung des Magnetfelds erfolgt über Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \int_s \frac{\hat{e}_{12} \times d\vec{s}_2}{r_{12}^2}$$

Nun gehen wir vor wie in der Mittwochsvorlesung gezeigt: wir parametrisieren zunächst den Weg $\vec{s}_2$, über den wir integrieren wollen, durch einen Kreis um den Mittelpunkt M der Leiterschleife:

$$\vec{s}_2(\phi) = \begin{pmatrix} r\mathrm{cos}\phi \\ r\mathrm{sin}\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da wir für unsere Formel die infinitesimale Wegstrecke brauchen, differenzieren wir diesen Ausdruck nach ϕ und erhalten

$$d\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -r\mathrm{sin}\phi \\ r\mathrm{cos}\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi$$

Der Verbindungsvektor $\vec{r}_{12}$ ist

$$\vec{r}_{12} = \begin{pmatrix} -r\mathrm{cos}\phi \\ -r\mathrm{sin}\phi \\ z \end{pmatrix}$$

Geteilt durch den Betrag $r_{12} = \sqrt{r^2 + z^2}$ ergibt sich der Einheitsvektor, sodass sich das Kreuzprodukt berechnen lässt:

$$\hat{e}_{12} \times d\vec{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \begin{pmatrix} -r\mathrm{cos}\phi \\ -r\mathrm{sin}\phi \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\mathrm{sin}\phi \\ r\mathrm{cos}\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{r^2+z^2}} \begin{pmatrix} zr\cos\phi \\ zr\sin\phi \\ r^2 \end{pmatrix} d\phi$$

Eingesetzt in die Biot-Savart-Gleichung ergibt sich

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{r^2+z^2}^3} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} zr\cos\phi \\ zr\sin\phi \\ r^2 \end{pmatrix} d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{r^2+z^2}^3} 2\pi r^2 \hat{e}_z$$

b) Nun sei $z = R = 6 \cdot 10^6 m$ und $B(R) = 0,8 \cdot 10^{-4} T$. Zudem ist $\pi r^2 = 1 m^2$. Da offensichtlich R » r ist, gilt $r_{12} = \sqrt{r^2 + R^2} \approx R$. Mit dieser Näherung folgt

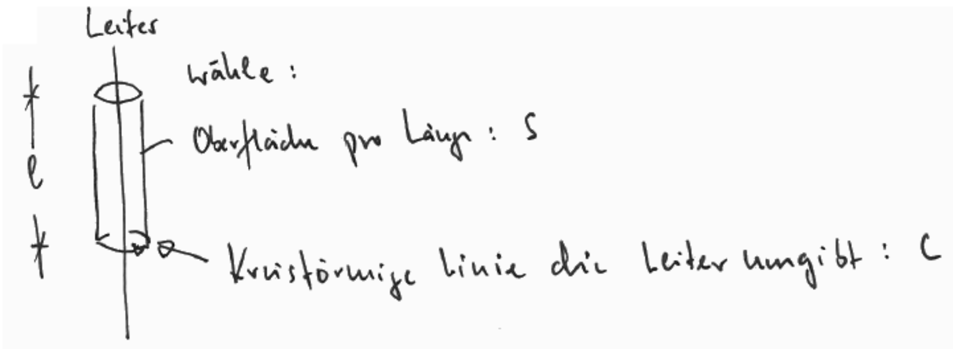
$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} 2\pi r^2$$

Aufgelöst nach I ergibt sich

$$I = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0 \pi r^2} = 8,64 \cdot 10^{22} A$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Wichtig: A und B sind gleichsinnig!
(a) Schalter S wird geöffnet: Bei geschlossenem S fließt der Strom wie gezeigt. Das B-Feld in Spule A weist dann von rechts nach links. Öffnen von S reduziert das B-Feld. Spule B erzeugt dann einen Strom, der versucht, das B-Feld aufrecht zu erhalten. Der Strom in B fließt in die gleiche Richtung wie zuvor in A, also **im Uhrzeigersinn**.
(b) Schalter S ist geschlossen und Widerstand R wird reduziert: Der Strom in Spule A steigt an. Spule B versucht, das zu verhindern. Der Strom in Spule B fließt entgegengesetzt zu Spule A, also **entgegen dem Uhrzeigersinn**.
(c) Schalter S ist geschlossen und ein Eisenstab neben die Spulen gelegt: Dadurch wird das Feld in Spule A erhöht. Spule B versucht, das zu verhindern. Der Strom in Spule B fließt entgegengesetzt zu Spule A, also **entgegen dem Uhrzeigersinn**.
(d) Schalter S ist geschlossen und Spule A wird entfernt: Dadurch wird das Feld in Spule B reduziert. Der Strom in Spule B fließt so, das er das verhindert, das heißt in die gleiche Richtung wie in A, **im Uhrzeigersinn**.

Aufgabe 7 (7 Punkte)
a) Aus den Maxwell-Gleichungen folgt:



$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} l = E(r) 2\pi r l \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \hat{e}_r$$

Nach dem Ampereschen Durchflutungsgesetz:

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = B(r) 2\pi r = \mu_0 I_0 \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\phi$$

für Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) und dem Ursprung im Draht.
b) Gesamtkraft auf Ladung q mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{e}_z$:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{e}_r + \frac{q\mu_0 I}{2\pi r}v(-\hat{e}_r)$$

Es entsteht aufgrund der Lorentzkraft eine radiale Kraft $\vec{F}$. Damit die Flugbahn unverändert bleibt, muss $\vec{F}$ verschwinden, d.h.

$$\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q\mu_0 I}{2\pi r}v = 0$$

Umwandeln liefert:

$$v = \frac{\lambda}{\varepsilon_0\mu_0 I} = \frac{\lambda c^2}{I}$$