Felicitas Thorne

Elektromagnetische Schwingungen und elektromagnetische Wellen im Vakuum

Freitag, 27. Februar 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Der elektromagnetische Schwingkreis

Ein elektromagnetischer Schwingkreis besteht aus einer Kapazität C und einer Induktivität L. Er ist vergleichbar mit einem mechanischen System aus zwei Federn zwischen denen eine Masse schwingt. Während bei der mechanischen Schwingung potentielle in kinetische Energie umgewandelt wird, wird in einem elektormagnetischen Schwingkreis die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie in die magnetische Energie der Spule umgewandelt und umgekehrt.

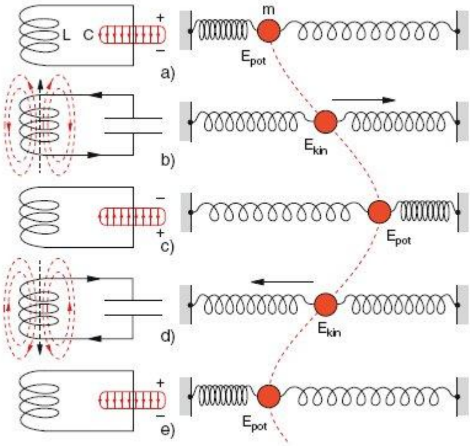

Abbildung 1: Elektromagnetischer Schwingkreis

Anhand der Abbildung (1) sollen nun kurz die Phasen der elektromagnetischen Schwingung erklärt werden. Zum Vergleich ist auch die analoge mechanische Schwingung abgebildet.

a) Über eine externe Spannungsquelle wird der Kondensator aufgeladen. Anschließend wird die Quelle entfernt.

b) Der Kondensator beginnt sich zu entladen, indem ein Strom durch die Spule fließt, wodurch in der Spule ein Magnetfeld erzeugt wird.

c) Ist der Ladungsunterschied am Kondensator vollständig ausgeglichen, fällt der Strom auf Null ab. Dies hat in der Spule einen Induktionsstrom zur Folge, der dieselbe Richtung hat wie der Ausgangsstrom. Dadurch lädt sich der Kondendsator erneut auf, diesmal jedoch mit entgegengesetzter Polung wie zu Beginn und der Kreislauf startet erneut mit entgegengesetztem Vorzeichen.

1.1 Gedämpfte elektromagnetische Schwingung

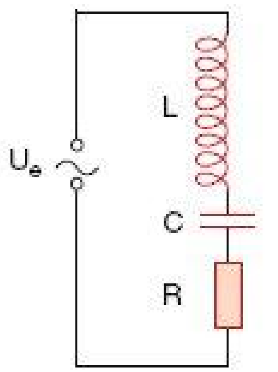

Abbildung 2: Schaltung des Schwingkreises

Es wird jetzt der bereits bekannte Schwingkreis betrachtet. Über die Spannungsquelle werde der Kondensator aufgeladen. Wie vorher, werden die kirchhoffschen Regeln verwendet und die daraus resultierende Spannungsbilanz nach der Zeit abgeleitet, was auf die bekannte Formel

$$\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t} = L \cdot \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C}$$

führt. Nun wird die Spannungsquelle abgeschaltet, wodurch die Schwingung einsetzt. Dies führt auf eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Strom:

$$L \cdot \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = 0 \tag{1}$$

Der ohmsche Widerstand sorgt dabei für die Dämpfung der Schwingung. Er wandelt die elektromagnetische Energie in Wärmeenergie um, ganz analog zur Reibungskraft bei einer mechanischen Schwingung. Zur Lösung der Diffenrentialgleichung wird folgende komplexe Funktion angesetzt:

$$I\left(t\right) = A \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für λ mit den Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \beta$$

Somit muss als allgemeine Lösung für Gleichung (1) eine Linearkombination gewählt werden:

$$I\left(t\right) = A_1 \cdot \mathrm{e}^{-(\alpha-\beta)t} + A_2 \cdot \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t} \tag{2}$$

Es lassen sich nun drei Fälle unterscheiden:

1. Kriechfall: $\beta \in \mathbf{R}$
2. Aperiodischer Grenzfall: $\beta = 0$
3. Gedämpfte Schwingung: $\beta \in \Im$

Kriechfall:
Man erhält in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen leicht unterschiedliche Lösungen:

Anfangsbedingungen: $I\left(t=0\right) = I_0$ und $\dot{I}\left(t=0\right) = 0$:

$$I\left(t\right) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\cosh\left(\beta t\right) + \frac{\alpha}{\beta}\sinh\left(\beta t\right)\right]$$

Der Strom fällt monoton und kriecht asymptotisch gegen Null.

Anfangsbedingungen: $I\left(t=0\right) = 0$ und $\dot{I}\left(t=0\right) \neq 0$:

$$I\left(t\right) = \frac{\dot{I}_0}{\beta} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \cdot \sinh\left(\beta t\right)$$

Der Strom steigt erst von Null an um später wieder asymptotisch gegen Null zu sinken.

Gedämpfte Schwingung:
Um Gleichung (2) für den Fall einer gedämpften Schwingung auszuwerten, wird die zweckmäßige Ersetzung $\beta = \imath \cdot \omega$ gemacht. Damit ergibt sich recht schnell als Lösung für den Strom:

$$I\left(t\right) = 2\left|A\right|\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

Die Größen A und φ müssen aus den Anfangsbedingungen ermittelt werden.
Es liegt hier demnach eine Schwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

vor, deren Amplitude exponentiell abfällt. Offensichtlich wird bei einer ungedämpften Schwingung, d.h. $R = 0$, die Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ reproduziert.

1.2 Gekoppelte Schwingkreise

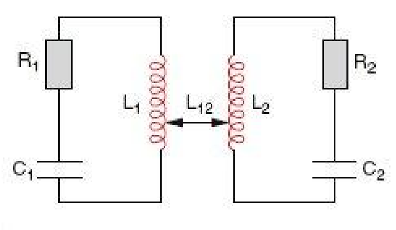

Abbildung 3: Induktiv gekoppelte Schwingkreise

Zwei Schwingkreise lassen sich über einen gemeinsamen Kondensator (kapazitive Kopplung), über eine gemeinsame Spule (induktive Kopplung) oder über einen gemeinsamen ohmschen Widerstand (galvanische Kopplung) miteinander verbinden. Exemplarisch werden hier die zwei induktiv gekoppelten Schwingkreise aus Abbildung (3) betrachtet.

Auf Grund der gegenseitigen Induktion der Schwingkreise erhält man aus den kirchhoffschen Regeln ein System aus gekoppelten Differentialgleichungen:

$$L_1\frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}t^2} + R_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + \frac{I_1}{C_1} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}^2 I_2}{\mathrm{d}t^2}$$
$$L_2\frac{\mathrm{d}^2 I_2}{\mathrm{d}t^2} + R_2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + \frac{I_2}{C_2} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}t^2}$$

Für beide Ströme wird eine Schwingungsgleichung der Form $I = I_0 \cdot e^{\imath\omega t}$ eingesetzt. Dadurch ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -L_1\omega^2 + \imath\omega R_1 + \frac{1}{C_1} & -\omega^2 L_{12} \\ -\omega^2 L_{12} & -L_2\omega^2 + \imath\omega R_2 + \frac{1}{C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Bei einer kapazitiven Kopplung muss der Kopplungsterm $\omega^2 L_{12}$ in Gleichung (3) durch $\frac{1}{C}$ und bei einer galvanischen Kopplung durch ωR ersetzt werden.
Aus der Mathematik ist bekannt, dass ein solches Gleichungssystem genau dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn die Determinante der Matrix in (3) Null ist. Diese Bedingung führt auf eine Bestimmungsgleichung für die Frequenz ω des Schwingkreises. Um die Lösng zu finden ist im Allgemeinen ein größerer Rechenaufwand notwendig.
Für den Spezialfall einer reibungsfreien Schwingung, d.h. $R_1 = R_2 = 0$, zweier identischer Schwingkreise, d.h. $L_1 = L_2 = L$ und $C_1 = C_2 = C$, erhält man eine quadratische Gleichung für ω mit den Lösungen:

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} \qquad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}$$

Dabei ist ω_0 die bekannte Resonanzfrequenz und $k = \frac{L_{12}}{L}$ der sogenannte Kopplungsgrad.

1.3 Hertzscher Dipol

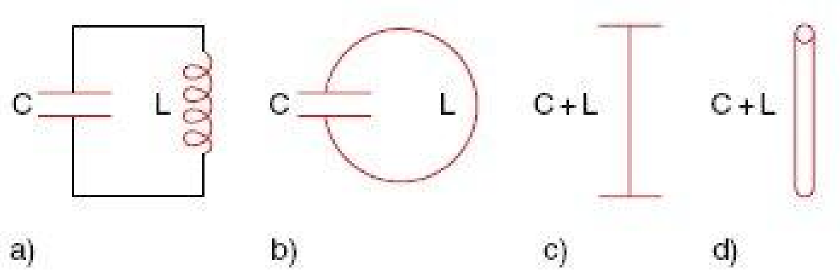

Abbildung 4: Vom Schwingkreis zum herzschen Dipol

Es wird nun kurz erläutert, wie ein elektromagnetischer Schwingkreis in einen herzschen Dipol umgewandelt werden kann. Dazu betrachte man Abbildung (4).

a) Zunächst liegt ein ungedämfter Schwingkreis mit Kapazität und Induktivität vor.

b) Die Spule wird nun soweit auseinandergezogen, dass sie am Ende nur noch aus einer Windung besteht.

c) Danach werden die Kondensatorplatten voneinander getrennt, so dass ein gerader Draht mit zwei geladenen Platten entsteht.

d) Die Platten können im letzten Schritt entfernt werden, so dass nur noch ein gerader Draht vorhanden ist.

In diesem Draht können die Ladungen zur Schwingung angeregt werden. Dies hat einen Wechselstrom im Draht zur Folge. Man kann im Experiment zeigen, dass der funktionale Verlauf des Stromes einer stehenden Welle entspricht, deren Amplitude an den Drahtenden Null ist. Die maximale Wellenlänge beträgt also $\lambda = 2l$ und die minimale Resonanzfrequenz ist somit $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{\pi}{l} v_{\text{ph}}$.
Die Phasengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle im Vakuum entspricht der Lichtgeschwindigkeit. Da sie sich hier aber im Draht ausbreitet, gehen noch die spezifischen Materialkonstanten mit ein:

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Ist ein hertzscher Dipol einmal zum Schwingen angeregt, so erzeugt er elektrische und magnetische Felder, die in den Raum abgestrahlt werden und sich dann ausbreiten. Dadurch ist er ein wichtiges Werkzeug

zum Senden aber auch Empfangen von elektromagnetischen Wellen (Antenne).
Die Energiestromdichte eines Dipols, d.h. die pro Zeit- und Flächeneinheit transportierte Energie, beträgt

$$S = \epsilon_0 \cdot c \cdot E^2$$

und die mittlere abgestrahlte Leistung

$$\overline{P} = \frac{q^2 \omega^4 d_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

wobei q die Ladung und d_0 den Durchmesser des Diplos (des Drahtes) bezeichnet.

2 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

2.1 Die Wellengleichung

Es werden noch einmal die Maxwellgleichungen im strom- und ladungsfreien Vakuum betrachtet:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wird auf die linke Gleichung die Rotation angewendet und die rechte Gleichung eingesetzt, so ergibt sich:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Unter Verwendung des folgenden Zusammenhanges

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \mathrm{grad}\underbrace{\left(\mathrm{div}\vec{E}\right)}_{=0} - \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\vec{E}\right) = -\Delta\vec{E}$$

erhält man schließlich eine Wellengleichung für das elektrische Feld:

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{4}$$

Für das Magnetfeld lässt sich auf analoge Weise ebenfalls eine Wellengleichung herleiten.

2.2 Lösung der Wellengleichung

Als Lösungen für Gleichung (4) bieten sich bei den meisten Problemen ebene Wellen

$$\vec{E}\left(\vec{r}, t\right) = E_0 \cdot \mathrm{e}^{\imath\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)} \tag{5}$$

oder Kugelwellen an:

$$\vec{E}\left(\vec{r}, t\right) = \frac{E_0}{|\vec{r}|} \cdot \mathrm{e}^{\imath\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)} \tag{6}$$

Dabei ist $\left|\vec{k}\right| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl und $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz mit $c = \nu \cdot \lambda$.
Oftmals reicht es auch, eine einfache sinus- oder cosinusförmige Welle anzusetzen. Alle genannten Lösungsformen gelten analog für das magnetische Feld.

2.3 Eigenschaften elektromagnetischer Wellen

Es wird nun angenommen, dass sich das elektrische Feld in x-Richtung ausbreitet. Wegen $\mathrm{div}\vec{E} = 0$ folgt $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0$ und somit ist das elektrische Feld in x-Richtung konstant, d.h. $\vec{E} \perp \vec{k}$.
Jetzt wird das Koordinatensystem so gelegt, dass das $\vec{E}$-Feld nur noch eine y-Komponente hat. Mit der Maxwellgleichung $\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ findet man, dass das $\vec{B}$-Feld nur noch eine z-Komponente hat. Zusammfassend bedeutet dies, dass

$$\vec{E} \perp \vec{k} \qquad \vec{B} \perp \vec{k} \qquad \vec{B} \perp \vec{E}$$

was man auch mit folgender Formel ausdrücken kann:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right) \tag{7}$$

Dies führt auf den Betrag des magnetischen Feldes:

$$B = \frac{1}{c} \cdot E \tag{8}$$

Elektromagnetische Wellen sind also transversale Wellen. Beide Felder stehen senkrecht aufeinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Zudem sind $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld in Phase.

2.4 Polarisation elektromagnetischer Wellen

Man unterscheidet zwischen linear, zirkular, elliptisch und unpolariserten Wellen.

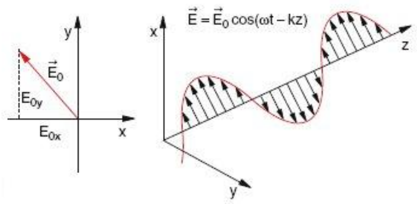

Abbildung 5: Lineare Polarisation

Eine linear polariserte Welle schwingt in einer Ebene, d.h. der Amplitudenvektor der Welle zeigt immer in die gleiche Richtung, z.B. $\perp z$. Zudem sind die verbleibenden Komponenten (hier x- und y-Richtung) in Phase.

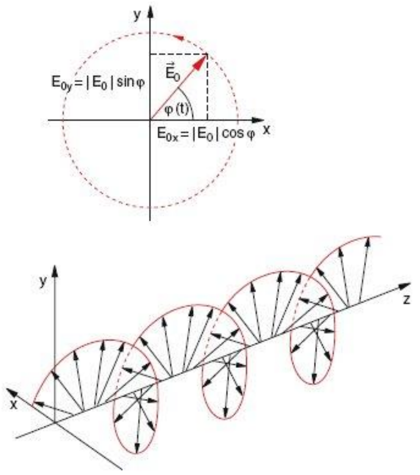

Abbildung 6: Zirkulare Polarisation

Auch eine zirkular polariserte Welle schwingt in einer Ebene und die Komponenten des Ampliudenvektors haben den gleichen Betrag. Es tritt jedoch eine Phasenveschiebung der Komponenten um 90° auf.

Ist eine der beiden Bedingungen für eine zirkular polariserte Welle nicht erfüllt, so liegt eine elliptisch polarisierte Welle vor.
Wenn der Ampliudenvektor der Welle keine zeitlich konstante Richtung besitzt und sich statistisch mit der Zeit ändert, so spricht man von einer unpolarisierten Welle. Lichtwellen sind in der Regel unpolarisiert.

2.5 Energie- und Impulstransport durch elektromagnetische Wellen

Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes w ist bereits bekannt. Nun wird die Energiestromdichte (Intensität) der elektromagnetischen Welle definiert. Dies ist die Energie, die pro Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit senkrecht zu $\vec{k}$, d.h. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, transportiert wird. Sie ist gegeben durch:

$$I = c \cdot \epsilon_0 E^2$$

Die Richtung dieses Energieflusses wird durch den Poynting-Vektor angegeben:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \epsilon_0 \cdot c^2 \left(\vec{E} \times \vec{B} \right)$$

mit $S = \left| \vec{S} \right| = I$. Die Einheit des Poynting-Vektors ist $[S] = 1 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$.

Ebenso wie der elektromagnetischen Welle eine Energiestromdichte zugeordnet wird, definiert man auch den Impuls pro Volumeneinheit:

$$\Pi_{\mathrm{St}} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \epsilon_0 \left(\vec{E} \times \vec{B} \right)$$

mit $|\Pi_{\mathrm{St}}| = \frac{I}{c^2}$
Bei einer Reflexion einer Welle an einer Wand, erhält die Wand den doppelten Impuls, wodurch ein Druck auf die Wand herrscht. So lässt sich auch der Strahlungdruck für elektromagnetische Wellen definieren:

$$p_{\mathrm{st}} = c \cdot |\Pi_{\mathrm{St}}| = \epsilon_0 \cdot E^2 = w$$

Literatur

Wolfgang Demtröder, Experimentalphysik 2 Elektrizität und Optik, 3. Auflage, Springer Verlag
Professor Dr. Andreas Meyer, Skript zur Vorlesung Experimentalphysik 2, Version vom SS 2005
Professor Dr. Reiner Krücken, Vorlesungsmitschrift zur Vorlesung Experimentalphysik 3, WS 2006/07